Universiteit Hasselt

Faculteit architectuur en kunst

Opleiding architectuur

Introductiecursus wiskunde

Module 1 :

Algemene grondbegrippen en rekentechnieken.

Verantwoordelijke docent : Prof. dr. Erik Nuyts

Hoofdauteur: ir. Lut Van den Bosch

Lesgever : nog te bepalen

Juli 2020

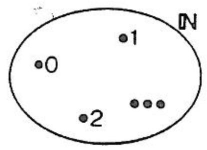
Module 1 :
Algemene grondbegrippen en rekentechnieken.

1.1 Verzameling van de reële getallen

De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

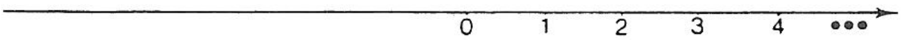
De opeenvolgende uitbreidingen van de getallenverzamelingen

1. De verzameling $\mathbb{N}$ *van de natuurlijke getallen*



$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}}$$

Voorstelling op de getallenas:

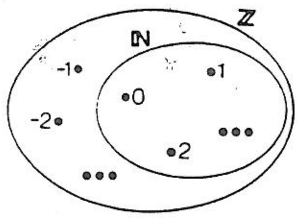


Elk natuurlijk getal heeft één *beeldpunt* op de getallenas. Het natuurlijk getal wordt de *abscis* van dat punt genoemd.

2. De verzameling $\mathbb{Z}$ *van de gehele getallen*

Aan elk natuurlijk getal werd een toestandsteken + of − toegevoegd. Zo ontstond de verzameling $\mathbb{Z}$ van de gehele getallen.

Een geheel getal met toestandsteken + wordt gelijkgesteld aan het oorspronkelijke natuurlijke getal:



$$+5 = 5$$

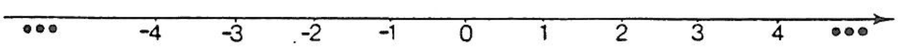
Men stelt ook:

$$+0 = -0 = 0$$

Bijgevolg:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}}$$

Voorstelling op de getallenas:



Elk geheel getal heeft één *beeldpunt* op de getallenas. Het gehele getal is de *abscis* van dat punt.

3. *De verzameling $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen*

Uitgaande van twee gehele getallen a, b met b $\neq$ 0 werd de volgende uitdrukking opgesteld:

$$\frac{a}{b}$$

Deze uitdrukking werd een *breuk* genoemd.

Voor breuken werd de gelijkheid gedefinieerd:

$$\forall\, a, c \in \mathbb{Z}: \quad \forall\, b, d \in \mathbb{Z}_0: \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Daardoor kun je voor een gegeven breuk een rij breuken schrijven die eraan gelijk zijn:

$$\dots = \frac{-6}{-9} = \frac{-4}{-6} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \dots$$

Al deze breuken bepalen één enkel getal: een *rationaal* getal. Dit rationaal getal mag door elk van deze breuken voorgesteld worden.

Uit de toestandstekens van de teller en de noemer van de breuk wordt een toestandsteken voor het rationale getal afgeleid:

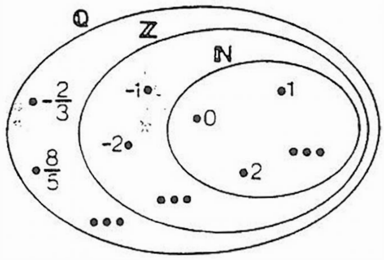
$$\frac{+5}{+3} = +\frac{5}{3} \qquad \frac{+7}{-4} = -\frac{7}{4} \qquad \frac{-9}{+2} = -\frac{9}{2} \qquad \frac{-1}{-4} = +\frac{1}{4}$$

Men gebruikt hiervoor de tekenregel:

Twee zelfde tekens geven +
Twee verschillende tekens geven −

Elk geheel getal a is een bijzonder rationaal getal door te stellen:

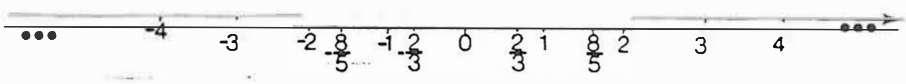
$$a = \frac{a}{1} \qquad (a \in \mathbb{Z})$$



Bijgevolg:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{5}, -\frac{8}{5}, \dots\}}$$

Voorstelling op de getallenas:



Elk rationaal getal heeft één *beeldpunt* op de getallenas. Het rationale getal is de *abscis* van dat punt.

4. *De verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen*

Elk rationaal getal kan geschreven worden op een decimale schrijfwijze die of afbrekend of repeterend is:

$$\frac{7}{4} = 1{,}75 \qquad\qquad \frac{5}{37} = 0{,}135135135\ldots$$

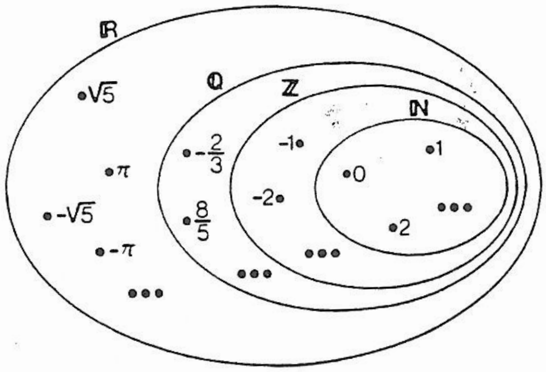
Er bestaan nog andere getallen , **irrationale getallen** genoemd , waarvoor de decimale schrijfwijze niet-afbrekend en niet-repeterend is :

$$\sqrt{5} = 2{,}23606797\ldots \qquad\qquad \pi = 3{,}14159265\ldots$$

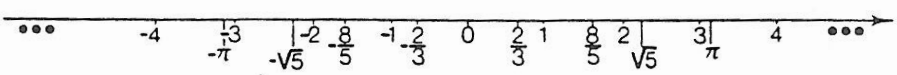
Door de verzameling $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen te verenigen met de verzameling irrationale getallen ontstaat de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen:

$$\boxed{\mathbb{R} = \{0, 1, -1, 2, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \pi, -\pi, \ldots\}}$$

Venn-diagram:



Voorstelling op de getallenas:



Elk reëel getal heeft één beeldpunt op de getallenas.

Maar nu geldt ook omgekeerd:

Elk punt op de getallenas is beeldpunt van één reëel getal.

Het getal wordt de *abscis* van dit punt genoemd.

1.2 Machten en wortels

1.2.1 Machten met gehele exponenten

Voorbeelden:

$2^3 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 8$	$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$
$2^4 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 16$	$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$
$2^1 = 2$	$(-2)^1 = -2$
$2^0 = 1$	$(-2)^0 = 1$
$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$
$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$	$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

Definities:

$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$: $\quad a^n = a \,.\, a \,.\, a \ldots a$ $\quad$ (*n* factoren)

$\forall a \in \mathbb{R}$: $\quad a^1 = a$

$\forall a \in \mathbb{R}_0$: $\quad a^0 = 1$

$\forall a \in \mathbb{R}_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Tekenregel:

1. **Een macht met oneven exponent heeft hetzelfde teken als het grondtal.**

   Zo bijvoorbeeld in de gegeven voorbeelden:

   $2^3 = 8 \qquad (-2)^3 = -8 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{8} \qquad (-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$

2. **Een macht met even exponent is altijd positief.**

   Zo bijvoorbeeld in de gegeven voorbeelden:

   $2^4 = 16 \qquad (-2)^4 = 16 \qquad 2^{-4} = \frac{1}{16} \qquad (-2)^{-4} = \frac{1}{16}$

Eigenschappen van de machten met gehele exponenten

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$:

$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$	$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$(a^m)^n = a^{m.n}$	

Hierbij moeten we, indien nodig, $a \neq 0$ of $b \neq 0$ nemen om te vermijden dot door nul gedeeld zou worden.

1.2.2 Wortels

Vierkantswortels

Definitie:

Een vierkantswortel uit een gegeven reëel getal is elk reëel getal waarvan de tweede macht gelijk is aan het gegeven getal.

$$\forall\ a,b \in \mathbb{R}: \quad \textbf{b is een vierkantswortel uit a} \Leftrightarrow b^2 = a$$

Voorbeelden:

3 en −3 zijn vierkantswortels uit 9, want $3^2 = 9$ en $(-3)^2 = 9$;
−25 heeft geen vierkantswortels want voor elk reëel getal b is b^2 positief, en dus in geen geval gelijk aan −25.

*Het bestaan van vierkantswortels uit een reëel getal **a***

$a < 0$	*Een strikt negatief getal heeft in $\mathbb{R}$ geen vierkantswortels.*
$a = 0$	*Het getal 0 heeft 0 als enige vierkantswortel.*
$a > 0$	*Een strikt positief getal heeft in $\mathbb{R}$ twee vierkantswortels die elkaars tegengestelde zijn.*

Notatie

De positieve vierkantswortel uit het positieve getal a noteren we met : $\sqrt{a}$
De negatieve vierkantswortel uit het positieve getal a noteren we met : $-\sqrt{a}$

Opmerking

Het symbool $\sqrt{\ }$ wordt dus uitsluitend gebruikt voor het aangeven van de positieve vierkantswortel van een getal.
Het is dus fout te schrijven dat $\sqrt{4}$ gelijk is aan ± 2 .
Men zou het antwoord ± 2 krijgen als men de vraag zou stellen "Bepaal de vierkantswortels van 4 " of als men de vergelijking $x^2 = 4$ zou oplossen.

Positieve vierkantswortel uit een kwadraat

Voor een reëel getal x zoeken we $\sqrt{x^2}$.

Een vierkantswortel uit x^2 is een getal waarvan de tweede macht gelijk is aan x^2. Zo zijn er twee getallen, x en $-x$, want:

$$x^2 = (-x)^2$$

Maar we zoeken alleen de positieve vierkantswortel uit x^2. Van de twee getallen, x en $-x$, moeten we datgene nemen dat positief is. Daarom:

$$\sqrt{x^2} = x \quad \textbf{als} \quad x \geqslant 0$$

$$\sqrt{x^2} = -x \quad \textbf{als} \quad x \leqslant 0$$

We kunnen dit samenvatten in één enkele rekenregel:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$

Derdemachtswortels

Definitie:

Een derdemachtswortel uit een gegeven reëel getal is elk reëel getal waarvan de derde macht gelijk is aan het gegeven getal.

$$\forall\, a,b \in \mathbb{R}: \quad \textbf{b is een derdemachtswortel uit a} \quad \Leftrightarrow \quad b^3 = a$$

Voorbeelden:

10 is een derdemachtswortel uit 1000, want $10^3 = 1000$

-2 is een derdemachtswortel uit -8, want $(-2)^3 = -8$

Het bestaan van een derdemachtswortel uit een reëel getal **a**

We kunnen nagaan dat in de voorbeelden geen enkel ander reëel getal dan de vermelde getallen in aanmerking komt. Een algemeen onderzoek geeft:

Elk reëel getal, positief, nul of negatief, heeft precies één derdemachtswortel.

Notatie:

De derdemachtswortel uit a noteren we:

$$\sqrt[3]{a}$$

Dit getal kan zowel positief, nul als negatief zijn. Het heeft hetzelfde teken als a.

Derdemachtswortel uit een derde macht:

Voor een reëel getal x zoeken we $\sqrt[3]{x^3}$

Deze wortel moet het getal zijn waarvan de derde macht gelijk is aan x^3, namelijk het getal x. Daarom:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \qquad \sqrt[3]{x^3} = x$$

Het getal $-x$ komt ditmaal niet in aanmerking, want $(-x)^3 \neq x^3$ voor $x \neq 0$.

n^{de}-machtswortels

Definitie:

De n^{de}-machtswortel uit een gegeven reëel getal is elk reëel getal waarvan de n^{de}-macht gelijk is aan het gegeven getal.

$$\forall\ n \in \mathbb{N}:\ \forall\ a,b \in \mathbb{R}:\quad \textbf{b is een } \mathbf{n^{de}}\textbf{-machtswortel uit a} \Leftrightarrow b^n = a$$

ɔorbeelden:

Enkele voorbeelden voor $n > 3$:

2 en -2 zijn vierdemachtswortels uit 16, want $2^4 = (-2)^4 = 16$

3 is een vijfdemachtswortel uit 243, want $3^5 = 243$

Het bestaan van n^{de}-machtswortels en hun notatie

Er is een groot verschil tussen n even en n oneven.

We veralgemenen de resultaten voor $n = 2$ en voor $n = 3$.

Voor n even

$a < 0$: Een strikt negatief getal heeft geen n^{de}-machtswortels in $\mathbb{R}$

$a = 0$: Het getal 0 heeft 0 als enige n^{de}-machtswortel in $\mathbb{R}$

$a > 0$: Een strikt positief getal a heeft in $\mathbb{R}$ twee n^{de}-machtswortels die elkaars tegengestelde zijn.
Voor de positieve wortel schrijven we $\sqrt[n]{a}$, voor de negatieve wortel schrijven we $-\sqrt[n]{a}$.

Voor n oneven

Elk reëel getal a, positief, nul of negatief, heeft in $\mathbb{R}$ één enkele n^{de}-machtswortel, genoteerd als $\sqrt[n]{a}$.

Bewerkingen met n^{de} -machtswortels in

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \ \forall n, m, s \in \mathbb{N}; \ \forall p, q, r \in \mathbb{R}$:

1. *Optelling:* $p\sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} - r\sqrt[n]{a} = (p + q - r)\sqrt[n]{a}$
2. *Vermenigvuldiging:* $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,.\,b}$
3. *Deling:* $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
4. *Machtsverheffing:* $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
5. *Worteltrekking:* $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
6. *Vereenvoudigen* : $\sqrt[ns]{a^{ms}} = \sqrt[n]{a^m}$

In sommige gevallen zal men *b, m, n, s* verschillend van nul moeten nemen om geen zinledige uitdrukkingen te verkrijgen.

Voorbeelden:

1) $5\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = (5 + 7 - 4)\sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$

2) $\sqrt[4]{8} \,.\, \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

3) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\dfrac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = 2$

4) $\sqrt[4]{16^3} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$

5) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

$\sqrt[6]{8} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$

6) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$

1.2.3 Machten met rationale exponenten

Definitie:

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \forall\, m \in \mathbb{Z} : \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \qquad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

De exponent $\frac{m}{n}$ bepaalt een ratonaal getal.

Door uitdrukkelijk $a=0$ uit te sluiten, vermijden we dat bij het optreden van een negatieve exponent het getal 0 in de noemer zou terechtkomen.

Opmerking : ook voor $a=0$ bestaat $a^{\frac{m}{n}}$ op voorwaarde dat de rationale exponent $\frac{m}{n}$ groter is dan nul.

Teken van een macht met rationale exponent

We weten dat voor een reëel getal a met $a>0$ de n^{de} -machtswortel strikt positief is.

Het getal $a^{\frac{m}{n}}$ is per definitie een macht met gehele exponent m van dit strikt positieve getal en is dus ook strikt positief.Dus:

Een macht met rationale exponent van een strikt positief grondtal is strikt positief.

1.3 Logaritmen

Het principe:

$100 = 10^2$ $\qquad\qquad$ $8 = 2^3$

$\log_{10} 100 = 2$ $\qquad\qquad$ $\log_2 8 = 3$

Besluit:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

Voorwaarden voor het grondtal a:

a moet >o

a moet $\neq 1$

Definitie:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}: \quad \log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y}$$

Opgelet: logaritmen zijn alleen gedefinieerd voor positieve reële getallen.
Negatieve getallen alsook het getal 0 hebben geen logaritme.

Gevolgen:

$\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a^y = y$

$x = a^{\log_a x}$

Eigenschappen van logaritmen met eenzelfde grondtal

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}: \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+: \forall n \in \mathbb{R}:$

$$\boxed{\begin{aligned} \log_a x \cdot y &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a x^n &= n \cdot \log_a x \end{aligned}}$$

Overgang van een logaritmestelsel naar een ander logaritmestelsel

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Natuurlijke logaritme : het grondtal is het getal van Euler (e)

Notatie : ln x

1.4 Ontbinden in factoren

Een veelterm ontbinden in factoren betekent dat we deze veelterm schrijven als een produkt van veeltermen met een lagere graad dan de gegeven veelterm.

Door het afzonderen van gemeenschappelijke factoren

$$ax - bx = x(a - b)$$
$$b(x - y) - a(x - y) = (x - y)(b - a)$$
$$(x + y) + b^2(x + y) = (x + y)(1 + b^2)$$
$$3x^4 - 7x^2 = x^2(3x^2 - 7)$$

Door groepering van termen

$$xy - y - x + 1 = xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (y - 1)(x - 1)$$
$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$$
$$a^2c^2 + a^2d^2 - pd^2 - pc^2 = c^2(a^2 - p) + d^2(a^2 - p) = (a^2 - p)(c^2 + d^2)$$
$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4y^2 + 6x + 1 &= \underline{9x^2} + \underline{6x} + \underline{1} - 4y^2 = (3x + 1)^2 - (2y)^2 \\ &= (3x + 1 - 2y)(3x + 1 + 2y) \\ &= (3x - 2y + 1)(3x + 2y + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= \underline{x^4} + \underline{4x^2} + \underline{4} - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

Door gebuik te maken van merkwaardige producten

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Ontbinding van een drieterm van de tweede graad $ax^2 + bx + c$

Men berekent de discriminant $D = b^2 - 4ac$.
Als $D < 0$ dan is $ax^2 + bx + c$ niet te ontbinden.
Als $D \geq 0$ dan is $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\text{waarbij } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

1.5 Oplossen van eerstegraads en tweedegraadsvergelijking

Eerstegraadsvergelijking met één onbekende

We moeten de volgende vergelijking oplossen in $\mathbb{R}$:

$$ax + b = 0 \qquad \text{met } a, b \in \mathbb{R}$$

Bij het oplossen in $\mathbb{R}$ van $ax + b = 0$, met $a,b \in \mathbb{R}$, kunnen zich de volgende gevallen voordoen:

$a \neq 0$:	$V = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$	**de vergelijking is bepaald**
$a = 0 \wedge b \neq 0$:	$V = \emptyset$	**de vergelijking is vals**
$a = 0 \wedge b = 0$:	$V = \mathbb{R}$	**de vergelijking is identiek**

V stelt hierbij de oplossingsverzameling voor.

De vierkantsvergelijking

Voor de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b,c \in \mathbb{R}$ noemen we discriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$

Dan geldt voor de reële wortels van de vergelijking:

$D < 0$	$\Leftrightarrow$	**geen wortels**	$V = \emptyset$
$D = 0$	$\Leftrightarrow$	**twee gelijke wortels**	$V = \{x_1\}$
$D > 0$	$\Leftrightarrow$	**twee verschillende wortels**	$V = \{x_1, x_2\}$

Voor $D \geqslant 0$ vinden we de wortels x_1, x_2 met:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Opmerking:

Als $D = 0$, dan zijn de gelijke wortels het getal $-\frac{b}{2a}$.

Som en product van de wortels van een vierkantsvergelijking

Voor de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b,c \in \mathbb{R}$ en met wortels x_1, x_2 geldt:

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

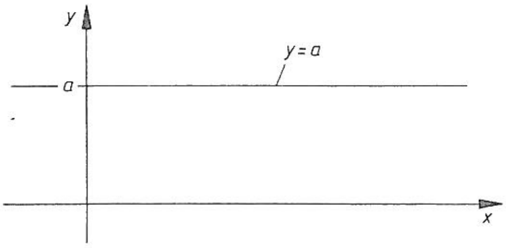
1.6 Eerste graadsfunctie en tweedegraadsfunctie

Constante en lineaire functies

We noemen polynoomfuncties van de graad 0 *constante functies*:

$$y = a_0 \quad \text{of} \quad y = a \tag{3-42}$$

De grafiek van zo'n functie is een *lijn* evenwijdig aan de x-as (zie figuur 3-48).



Figuur 3-48
De constante functie $y = a$

■ **Voorbeelden**

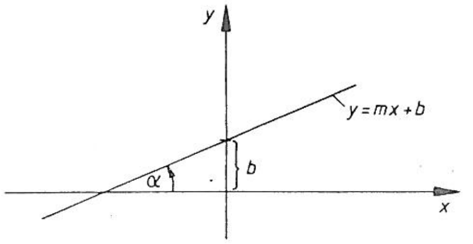
(1) Bij een eenparige beweging langs een rechte lijn is de snelheid v *onafhankelijk* van de tijd t: $v = v(t) =$ constant.

(2) De totale energie (trillingsenergie) E van een weerstandsloze *slinger* verandert niet in de tijd, dat wil zeggen $E = E(t) =$ constant. ■

We komen in toepassingen heel vaak *lineaire functies* (polynoomfuncties van de graad 1) tegen:

$$y = a_1 x + a_0 \quad \text{of} \quad y = mx + b \tag{3-43}$$

De grafiek is een *lijn* met richtingscoëfficiënt m; deze lijn snijdt de y-as in het punt $(0, b)$ (zie figuur 3-49).



Figuur 3-49
De lijn $y = mx + b$

Er bestaat het volgende verband tussen de richtingscoëfficiënt m en de hellingshoek α:

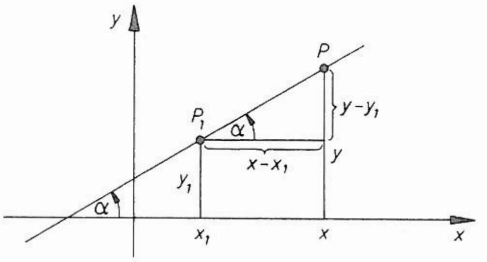
$$m = \tan \alpha \tag{3-44}$$

We kunnen de vergelijking van een lijn, behalve in de vorm $y = mx + b$, ook in andere vormen geven:

Vergelijking van een lijn als de richtingscoëfficiënt en een punt gegeven zijn (figuur 3-50)

Gegeven zijn een punt $P_1 = (x_1, y_1)$ en een richtingscoëfficiënt m:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \qquad (3\text{-}45)$$

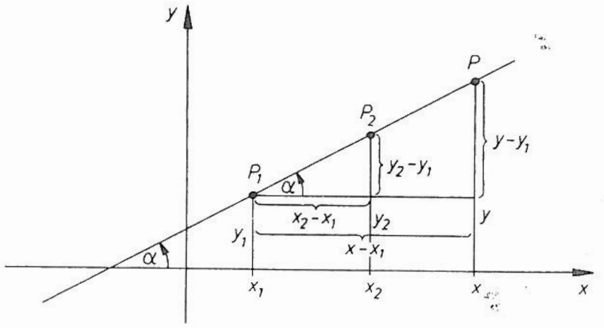


Figuur 3-50
Vergelijking van een lijn als de richtingscoëfficiënt en een punt gegeven zijn

Vergelijking van een lijn als twee punten gegeven zijn (figuur 3-51)

Een lijn wordt door twee punten éénduidig vastgelegd:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (3\text{-}46)$$

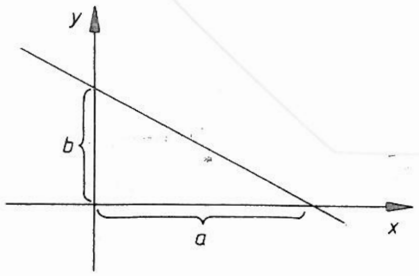


Figuur 3-51
Vergelijking van een lijn als twee punten gegeven zijn

Vergelijking van een lijn als de snijpunten met de coördinaatassen gegeven zijn (figuur 3-52)

Gegeven zijn de snijpunten met de coördinaatassen ($(a, 0)$ het snijpunt met de x-as, $(0, b)$ het snijpunt met de y-as):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3\text{-}47)$$



Figuur 3-52
Vergelijking van een lijn als de snijpunten met de coördinaatassen gegeven zijn

Tweedegraads functies

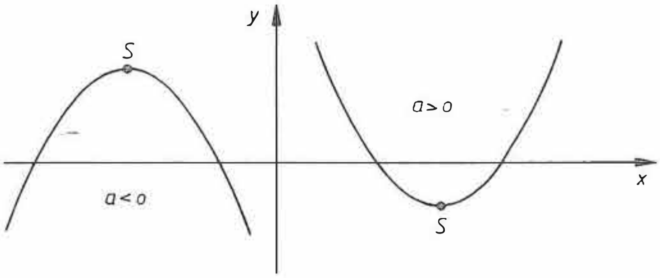
We kunnen *tweedegraadsfuncties* (of polynoomfuncties van de tweede graad) schrijven in de vorm:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{of} \quad y = ax^2 + bx + c \tag{3-48}$$

De grafiek is een *parabool* (de vergelijking 3-48 is de algemene vergelijking). De coëfficiënt a bepaalt de *stand* van de parabool (figuur 3-53):

$a > 0$: de parabool heeft de opening naar *boven*, in de top bereikt de functie het *minimum*.

$a < 0$: de parabool heeft de opening naar *beneden*, in de top bereikt de functie het *maximum*.



Figuur 3-53 Een parabool met de opening naar beneden ($a < 0$) en een parabool met de opening naar boven ($a < 0$)

■ **Voorbeelden**

(1) De kinetische energie E_{kin} van een lichaam met massa m is een *tweedegraads* functie van de snelheid v: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$.

(2) Bij een eenparig versnelde beweging is de afgelegde weg s een *tweedegraads* functie van de tijd t:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$$

(a: versnelling; s_0: de beginpositie en v_0: de beginsnelheid op het tijdstip $t_0 = 0$). ■

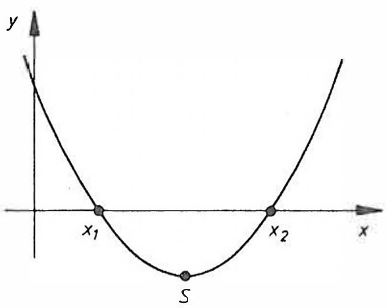
We kunnen de vergelijking van een parabool ook in andere vormen dan (3-48) geven:

Produktvorm van een parabool als de nulpunten gegeven zijn (figuur 3-54)

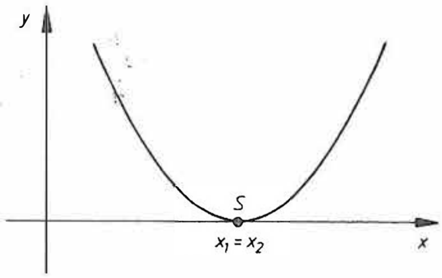
$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{3-49}$$

x_1, x_2: de snijpunten van de parabool met de x-as (reële nulpunten).

We noemen $(x - x_1)$ en $(x - x_2)$ in (3-49) *lineaire factoren*.



Figuur 3-54 Van een parabool zijn de snijpunten met de x-as gegeven



Figuur 3-55 Dubbel nulpunt van een parabool (de top is het raakpunt aan de x-as)

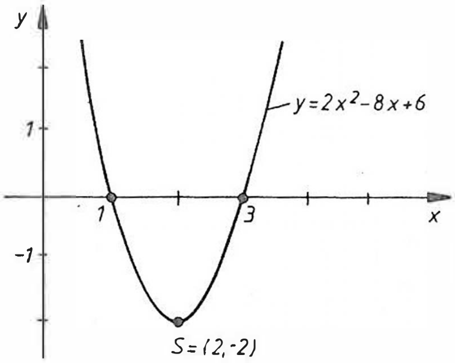
Bijzonder geval: als de twee nulpunten *samenvallen* ($x_1 = x_2$, een *dubbel* nulpunt), ligt de top op de x-as (figuur 3-55).

Voorbeelden

(1) $y = 2x^2 - 8x + 6$ (figuur 3-56).

Nulpunten: $x_1 = 1, x_2 = 3$

Produktvorm van de parabool: $y = 2(x-1)(x-3)$



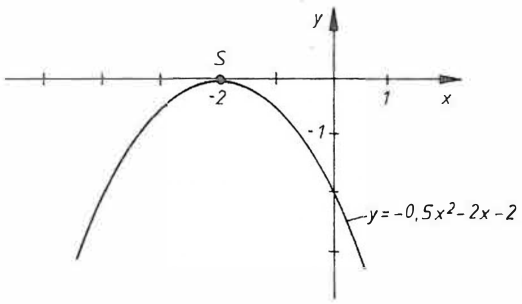
Figuur 3-56
Grafiek van de parabool $y = 2x^2 - 8x + 6$

(2) $y = -0{,}5x^2 - 2x - 2$ (figuur 3-57).

Nulpunten: $x_1 = x_2 = -2$ (*dubbel* nulpunt)

De *top* en het *maximum* liggen dus in $S = (-2, 0)$

Produktvorm van de parabool: $y = -0{,}5\,(x+2)^2$

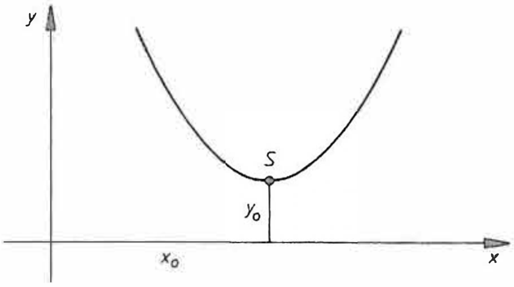


Figuur 3-57
Grafiek van de parabool
$y = -0{,}5x^2 - 2x - 2$

Topvorm van een parabool (figuur 3-58)

$$y - y_0 = a\,(x - x_0)^2 \qquad (3\text{-}50)$$

x_0, y_0: coördinaten van de top



Figuur 3-58
De top van een parabool

1.7 Oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen

Voorbeelden

Een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Definities

Een lineaire vergelijking is een vergelijking waarbij de onbekende(n) voorkomen in de eerste graad.

Gelijkwaardige stelsels:
We noemen twee stelsels gelijkwaardig als ze dezelfde oplossingsverzameling hebben.

Een $m \times n$ stelsel :
Een stelsel van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden noemen we verkort een $m \times n$ stelsel

Lineaire combinatie:
Een lineaire combinatie van enkele vergelijkingen is de vergelijking die onstaat door elke vergelijking te vermenigvuldigen met een reëel getal verschillend van nul,en daarna al de verkregen vergelijkingen op te tellen.

Lineair afhankelijke vergelijkingen:
We noemen enkele vergelijkingen lineair afhankelijk als een ervan een lineaire combinatie is van de andere.

Strijdig stelsel:
We noemen een stelsel strijdig als het stelsel geen oplossingen heeft.
Voorbeeld:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Aantal oplossingen van een $m \times n$ stelsel

Men kan bewijzen dat indien:

$m<n$: aantal vergelijkingen kleiner dan aantal onbekenden:

er zijn oneindig veel oplossingen(tenzij voor de coëfficiënten bijzondere voorwaarden gelden)

$m=n$: aantal vergelijkingen gelijk aan aantal onbekenden

er is precies één oplossing(tenzij voor de coëfficiënten bijzondere voorwaarden gelden)

$m>n$: aantal vergelijkingen groter dan aantal onbekenden:

er zijn geen oplossingen(tenzij voor de coëfficiënten bijzondere voorwaarden gelden)

Oplossingsmethoden :

Tijdens de les zal de methode van Gauss uitgelegd worden.

Deze methode is terug te vinden in het handboek dat in 1 bachelor architectuur gebruikt wordt(Wiskunde voor het hoger technisch onderwijs (deel 1) van Lothar Papula)

1.8 Oefeningen

1. Vereenvoudig

a. $\dfrac{x^{2a}}{x^a}$

b. $5^{x+1}(5a)^{-3}(5a^3)^2$

c. $a^2b^3(ab^2)^{-5}$

d. $\dfrac{6 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}}$

e. $\dfrac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{(10^{-3} \cdot 10^{-2})^2}$

f. $\dfrac{4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4}}{12 \cdot 10^{-4}}$

2. Schrijf met exponenten

a. $\sqrt[3]{125}$

b. $\sqrt[3]{-8}$

c. $\sqrt{a^3b^4}$

d. $\sqrt[3]{\dfrac{a^6}{8}}$

e. $\sqrt{\dfrac{6 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}}}$

f. $\sqrt[4]{64}$

g. $\sqrt[3]{-27a^{-3}b^5}$

h. $\sqrt[5]{\dfrac{32a^7b^{-11}}{c^9}}$

i. $\sqrt[3]{\dfrac{(5 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 10^2}}$

i. $\dfrac{\sqrt[3]{-5a^{10}}}{\sqrt[3]{40a}}$

3. Vereenvoudig zo ver mogelijk

a. $((x\ y)^{3/2})^2$

b. $\dfrac{(2a^{1/2}b^{1/3}c)^3}{4abc}$

c. $\dfrac{\sqrt{ab}\sqrt{xy}}{(ab)^{-1}(xy)^{3/2}}$

d. $\dfrac{\dfrac{b^{1/2}c^{1/3}}{d^4} \cdot \dfrac{a^{-4}b^2c^{-2/3}}{d^{13/4}}}{\dfrac{a^{-5}b^{-3/2}c^{3/2}}{d^{29/4}}}$

4. Bereken zonder rekenmachine

$(\sqrt{3})^2$	$49^{-\frac{1}{2}}$	$36^{-\frac{1}{2}}$	$121^{-\frac{1}{2}}$	$1000^{-\frac{1}{3}}$	$16^{-\frac{1}{4}}$
$(\sqrt{5})^4$	$16^{-\frac{3}{4}}$	$32^{-\frac{2}{5}}$	$25^{-\frac{3}{2}}$	$100^{-\frac{5}{2}}$	$125^{-\frac{2}{3}}$
$(\sqrt[5]{32})^3$	$81^{-\frac{5}{4}}$	$16^{-\frac{3}{2}}$	$81^{-\frac{1}{4}}$	$10000^{-\frac{3}{4}}$	$36^{-\frac{3}{2}}$
$\sqrt[6]{8}$	$4^{-2.5}$	$144^{-0.5}$	$81^{-0.75}$	$32^{-0.2}$	$32^{-0.6}$
$\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$	$\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$\left(\dfrac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$	$\left(\dfrac{1000}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$	$\left(\dfrac{625}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$

5. Bereken zonder rekenmachine

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}} \qquad \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{25}}}}}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2 \qquad \sqrt{\frac{1}{\sqrt{10}-3}-\frac{1}{\sqrt{10}+3}}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{5-\sqrt{13}}\right)^2 : \left(\frac{5+\sqrt{13}}{1+\sqrt{13}}\right)^2 \qquad \sqrt{\frac{1-\sqrt{5}}{4-2\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{4-2\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}}$$

6. Ontbind in factoren

a. x^3-4x^2

b. $9x^2+30x+5$

c. $2a(-x-y)-7(x+y)$

d. $4p^2-12p(x+p)+9(x+p)^2$

e. $(x-9)^2-9$

f. x^3+3x^2+3x+1

g. $x^2-(y+2)^2$

h. $27x^3+8$

i. $x^3-6x^2\sqrt{5}+60x-40\sqrt{5}$

j. $64a^3-125b^3$

k. $27^3+\dfrac{1}{27c^3}$

l. x^8+8x^4+16

m. $4x^2-3x-1$

n. $40xy+24x-30y-16x^2-25y^2-9$

o. x^4+1

p. a^4+9

7. Vereenvoudig

a. $\dfrac{a-b}{b-a}$

b. $\dfrac{xy}{x^2-xy}$

c. $\dfrac{a-b}{(b-a)^2}$

d. $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$

e. $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$

f. $\dfrac{a^6-1}{1-a^4}$

g. $\dfrac{100-4x^2}{25+5x}$

8. Bereken

a. $(2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$

b. $(-1+2\sqrt{3})^2$

c. $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

d. $4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

e. $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$

f. $\sqrt[4]{64}-5\sqrt[6]{\frac{1}{8}}$

9. Logaritmen

Gegeven volgende tabel:

getal	log(getal)
2	0,30103
3	0,47712
5	0,69897

Bereken zonder gebruik te maken van een rekenmachine:

a. $\log\sqrt{27} =$

b. $\log\sqrt[3]{\frac{2}{135}} =$

c. $\log(\frac{2^3 3^2}{8})$

Bereken x uit de onderstaande uitdrukkingen zonder gebruik te maken van een rekenmachine

a. $\log x = 4\log 2 + \log 36$
b. $x = \log\sqrt{5}$
c. $\log x = -1$
d. $\log(2x-1) = \log 44$
e. $\log x = \frac{3}{2}$
f. $\log(x-2) + \log x = \log 3$
g. $\log x = -3$
h. $\log(2x-3) = 2$
i. $16^x - 7.4^x = 8$

Bereken x als:

a. $\log_5 x = -1$

b. $\log_x \sqrt{2} = 2$

c. $\log x = -3$

d. $\log_x \frac{1}{3} = 2$

10. Oplossen van vergelijkingen

1. Los de volgende eerstegraadsvergelijkingen op

a. $x+3(x-2)=2x-4$

b. $2(t+3)=5(t-1)-7(t-3)$

c. $\dfrac{x+3}{2x}+\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

d. $\dfrac{p-3}{p-4}=\dfrac{p+4}{p-2}$

2. Los de volgende vergelijkingen op in IR:

a. $x^2+20x+100=0$

b. $x^2-x\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{25}=0$

c. $\dfrac{x}{x-k}+1=\dfrac{6k}{x}$ (k is een constante die gelijk is aan 12)

d. $(x-3)^2-1=0$

e. $3{,}15677x^2-2{,}80085x-1{,}06=0$

f. $x^2+14{,}007x+11{,}1218=0$

g $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{2x-1}{x}$

h. $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{4}{3x+1}=\dfrac{x+27}{3x^2-8x-3}$

i. $x^2-2x-3=0$

3. Bereken de *reële* oplossingen van de volgende tweedegraads vergelijkingen:

a) $-4x^2+6x-1=0$

b) $4x^2+8x-60=0$

c) $x^2-10x=74$

d) $x^2-4x+13=0$

e) $-1=-9.(x-2)^2$

f) $x^2+9x=-19$

g) $5x^2+20x+20=0$

h) $(x-1)(x+3)=-4$

4. Bepaal de parameter c zo, dat de vergelijking $2x^2+4x=c$ precies *één* reële oplossing heeft.

11. Oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen.

1. Los de volgende stelsels op:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(x - 6) = 3(y - 4) \\ 7x + y = 46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5y = 19 \\ x - 6y = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 23 \\ 13x - 11y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x + 88 = 7(y - 1) \\ 14x = 26y - 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 6y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}6x - 0{,}3y = 5 \\ 8x + 17y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2x - y - 2 \\ x - y = 6 - 2x - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x + y = 25 \\ 12x = 32 + 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 8 - 3(x - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 9x - 3y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 117x - 215y = -79 \\ 201x - 150y = 303 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7y = 30 \\ x - 7y = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(x - y) = 4 \\ \frac{x}{4} = 1 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3 \\ 4x - (y + 3) = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 115 - 7y \\ 3x = y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 6y = 5 \\ 3x + 9y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 23x + 19y = 18 \\ 33x + 17y = -46 \end{cases}$$

1.9 Oefeningen : extra

1. Breng zoveel mogelijk factoren buiten haakjes.

a. $6a + 12$
b. $12a + 16$
c. $9a - 12$
d. $15a - 10$
e. $27a + 81$

a. $3a - 6b + 9$
b. $12a + 8b - 16$
c. $9a + 12b + 3$
d. $30a - 24b + 60$
e. $24a + 60b - 36$

a. $-6a + 9b - 15$
b. $-14a + 35b - 21$
c. $-18a - 24b - 12c$
d. $-28a - 70b + 42c$
e. $-45a + 27b - 63c - 18$

a. $a^2 + a$
b. $a^3 - a^2$
c. $a^3 - a^2 + a$
d. $a^4 + a^3 - a^2$
e. $a^6 - a^4 + a^3$

a. $3a^2 + 6a$
b. $9a^3 + 6a^2 - 3a$
c. $15a^4 - 10a^3 + 25a^2$
d. $27a^6 - 18a^4 - 36a^2$
e. $48a^4 - 24a^3 + 36a^2 + 60a$

a. $3a^2b + 6ab$
b. $9a^2b - 9ab^2$
c. $12ab^2 - 4ab$
d. $14a^2b^2 - 21ab^2$
e. $18a^2b^2 - 15a^2b$

a. $3a^3b^2 + 6a^2b$
b. $6a^4b^3 - 9a^3b^2 + 12a^2b$
c. $10a^3b^2c^2 - 5a^2bc^2 - 15abc$
d. $8a^6b^5c^4 - 12a^4b^4c^3 + 20a^3b^4c^3$
e. $a^3b^3c^3 + a^3b^3c^2 + a^3b^3c$

a. $-4a^2b^3c^2 + 2a^2b^2c^2 - 6a^2bc^2$
b. $a^6b^5c^4 - a^4b^6c^4 - a^3b^7c^3$
c. $-2a^3c^4 + 2a^2b^2c^3 - 4a^2bc^2$
d. $-a^7b^6 + a^6b^7 - a^5b^6$
e. $-a^8b^7c^6 - a^7b^6c^7 + a^6b^6c^6$

a. $a(b + 3) + 3(b + 3)$
b. $a(b - 1) - 2(b - 1)$
c. $2a(b + 4) + 7(b + 4)$
d. $a^2(2b - 1) + 2(2b - 1)$
e. $a(b - 2) - (b - 2)$

a. $a^2(b + 1) - a(b + 1)$
b. $6a(2b + 1) + 12(2b + 1)$
c. $-2a(b - 1) + 4(b - 1)$
d. $a^3(4b + 3) - a^2(4b + 3)$
e. $-6a^2(2b + 3) - 9a(2b + 3)$

a. $(a + 1)(b + 1) + 3(b + 1)$
b. $(2a - 1)(b + 1) + (2a - 1)(b - 1)$
c. $(a + 3)(2b - 1) + (2a - 1)(2b - 1)$
d. $(a - 1)(a + 3) - (a - 2)(a + 3)$
e. $(a - 1)^2 + (a - 1)$

a. $2(a + 3)^2 + 4(a + 3)$
b. $(a + 3)^2(b + 1) - 2(a + 3)(b + 1)$
c. $(a - 1)^2(a + 2) - (a - 1)(a + 2)^2$
d. $3(a + 2)^2(a - 2) + 9(a + 2)(a - 2)^2$
e. $-2(a + 4)^3 - 6(a + 4)^2(a - 2)$

2. Vereenvoudig de volgende breuken zoveel mogelijk.

a. $\dfrac{3a+18}{9b-6}$

b. $\dfrac{a^2+a}{a+1}$

c. $\dfrac{4a-2}{2a^2-a}$

d. $\dfrac{a+2b}{a^2-4b^2}$

e. $\dfrac{ab+b^3}{b^2-3b}$

a. $\dfrac{a^2b+ab^2}{3abc}$

b. $\dfrac{a^2-4a}{a+2a^2}$

c. $\dfrac{4ab-3ab^2}{a^2-abc}$

d. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

e. $\dfrac{a^4-b^2}{a^2-b}$

3. Breng onder één noemer en vereenvoudig zo mogelijk.

a. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{1}{a^2-9}$

b. $\dfrac{1}{a-3}-\dfrac{a}{a^2-9}$

c. $\dfrac{a^2+1}{a-3}-\dfrac{a^2-1}{a+3}$

d. $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{b-a}$

e. $\dfrac{a^2-1}{a-1}-\dfrac{a^2+1}{a+1}$

a. $\dfrac{a+b}{a-2b}-\dfrac{a-2b}{a+b}$

b. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}+a-1$

c. $\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{2}{4-a^2}$

d. $\dfrac{3a-2b}{a-b}+\dfrac{2a+3b}{3a}$

e. $\dfrac{4-a}{a}-\dfrac{4+a}{2a}$

4. Los de volgende vegelijkingen op.

a. $x^2 + 5x + 1 = 0$
b. $x^2 - 3x + 2 = 0$
c. $x^2 + 7x + 3 = 0$
d. $x^2 - x + 1 = 0$
e. $x^2 + 11x + 11 = 0$

a. $x^2 + 3x + 1 = 0$
b. $x^2 - 4x + 3 = 0$
c. $x^2 + 9x - 2 = 0$
d. $x^2 - 12x + 3 = 0$
e. $x^2 - 5x + 1 = 0$

a. $2x^2 + 4x + 3 = 0$
b. $2x^2 - 12x + 9 = 0$
c. $3x^2 + 12x - 8 = 0$
d. $4x^2 + 12x + 1 = 0$
e. $6x^2 - 12x - 1 = 0$

a. $2x^2 + x - 1 = 0$
b. $3x^2 + 2x + 1 = 0$
c. $2x^2 + 8x - 2 = 0$
d. $6x^2 + 18x + 7 = 0$
e. $4x^2 - 8x + 1 = 0$

a. $-x^2 + 2x + 1 = 0$
b. $-2x^2 + 8x - 3 = 0$
c. $-3x^2 + 9x - 1 = 0$
d. $-4x^2 - 12x + 9 = 0$
e. $-x^2 + x + 1 = 0$

a. $3x^2 - 4x + 3 = 0$
b. $-2x^2 + 3x + 2 = 0$
c. $-4x^2 + 6x + 5 = 0$
d. $6x^2 + 18x - 1 = 0$
e. $-x^2 - x - 1 = 0$

a. $\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$
b. $\frac{2}{3}x^2 + 2x - 3 = 0$
c. $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$
d. $\frac{4}{5}x^2 + 3x - 2 = 0$
e. $\frac{5}{2}x^2 + 5x - 2 = 0$

a. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0$
b. $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 0$
c. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0$
d. $\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{5}{4} = 0$
e. $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$

a. $x(1 - x) = -2$
b. $(3x + 1)(x + 3) = 1$
c. $(x - 2)(2 - 3x) = x$
d. $(5 - x)(5 + x) = 5$
e. $(1 - x)(2 - x) = 3 - x$

a. $(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 5$
b. $(1 - x^2)(1 + 2x^2) = x^2$
c. $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3) = 1$
d. $\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$
e. $(1 - x^3)(2 - x^3) = x^3$

Universiteit Hasselt

Faculteit architectuur en kunst

Opleiding architectuur

Introductiecursus wiskunde

Module 2 :

Goniometrie

Verantwoordelijke docent : Prof. dr. Erik Nuyts

Hoofdauteur: ir. Lut Van den Bosch

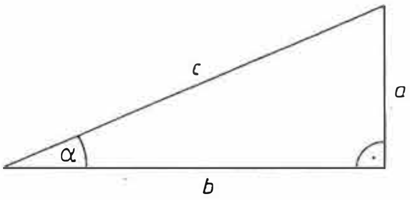
Lesgever : nog te bepalen

juli 2020

Module 2 : Goniometrie

2.1 De goniometrische cirkel : definities en basisbegrippen.

We definiëren de vier goniometrische functies *sinus, cosinus, tangens* en *cotangens* eerst alleen voor hoeken tussen 0° en 90° als quotiënten van de lengten van de zijden van een *rechthoekige driehoek* (figuur 3-93):



a, b: rechtshoekszijden
c: hypotenusa

Figuur 3-93

$$\sin\ \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{hypotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad (3\text{-}117)$$

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{hypotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad (3\text{-}118)$$

$$\tan\ \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha} \qquad (3\text{-}119)$$

$$\cot\ \alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}} = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha} = \frac{1}{\tan\ \alpha} \qquad (3\text{-}120)$$

Hoekmaten

Hoeken worden gemeten in *graden* of in *booglengtes* (radialen). Een hoek van 1 graad berust op het verdelen van de cirkelomtrek in 360 even grote stukken. Een *booglengte* is als volgt gedefinieerd:

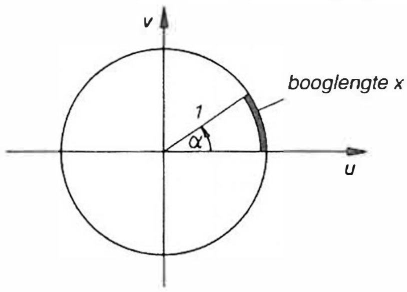
Definitie: We verstaan onder de *booglengte* x van een hoek α (in graden) de lengte van de boog tegenover de hoek α in de eenheidscirkel (straal r = 1) (figuur 3-94).

Opmerking:

We kunnen de *booglengte* x ook algemener definiëren. Als b de lengte van de boog tegenover de hoek α is in een cirkel met straal r, geldt:

$$x = \frac{\text{lengte van de boog}}{\text{straal}} = \frac{b}{r} \qquad (3\text{-}121)$$

De booglengte is dus een *dimensieloze* grootheid; de 'eenheid' (*radialen*) wordt soms weggelaten. Als $b = r$ noemen we de bijbehorende hoek α een hoek van 1 radiaal (1 rad).



Figuur 3-94

Er bestaat het volgende *lineaire* verband tussen α graden en booglengte x:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{2\pi}{360°} = \frac{\pi}{180°} \qquad (3\text{-}122)$$

Met deze formule kunnen we hoeken in graden *omrekenen* in radialen en omgekeerd:

Van graden naar radialen: $x = \dfrac{\pi}{180°}\,\alpha$ (3-123)

Van radialen naar graden: $\alpha = \dfrac{180°}{\pi}\,x$ (3-124)

■ **Voorbeelden**

(1) Omrekenen van graden (α) naar radialen (x):

α	30°	45°	90°	180°	225°	127,5°
x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\frac{5}{4}\pi$	2,2253

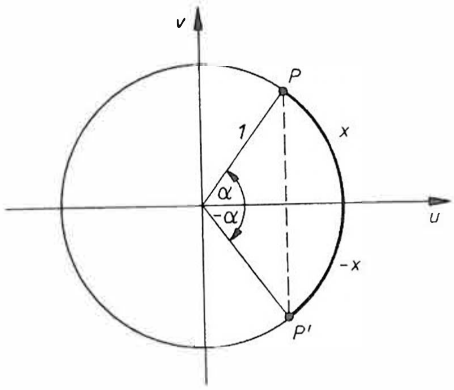
(2) Omrekenen van radialen (x) naar graden (α):

x	0,43	0,98	1,61	2,08	4,12	π
α	24,64°	56,15°	92,25°	119,18°	236,06°	180°

■

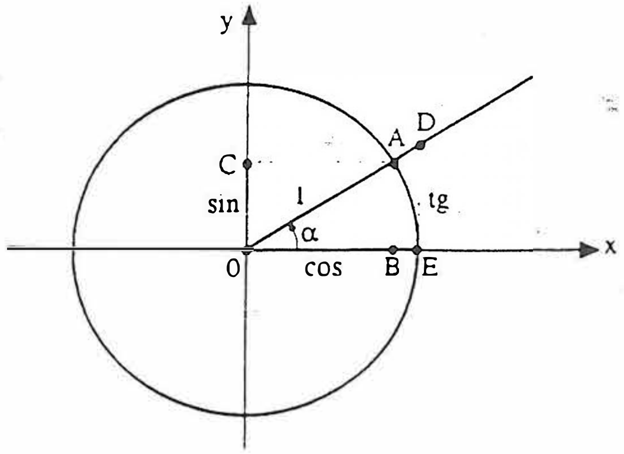
Oriëntatie

We geven hoeken die in de eenheidscirkel getekend zijn de volgende oriëntatie: als de hoek *tegen de klok in* doorlopen wordt, noemen we hem *positief*; wordt de hoek *met de klok mee* doorlopen, dan noemen we hem *negatief* (figuur 3-95).



Figuur 3-95
Definitie van de oriëntatie van een hoek

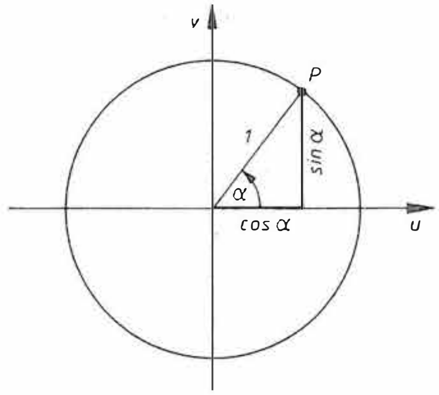
De goniometrische cirkel is een cirkel met een straal gelijk aan 1.



De sinusfunctie in de eenheidscirkel

We zijn nu zover dat we de *sinusfunctie* kunnen definiëren voor willekeurige positieve en negatieve hoeken. Stel het punt P ligt op de eenheidscirkel en hoort bij de middelpuntshoek α (figuur 3-96). Volgens definitie (3-117) is dan de sinus van α:

$$\sin\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{hypotenusa}} = \frac{\text{ordinaat van } P}{1} = \text{ordinaat van } P \qquad (3\text{-}125)$$



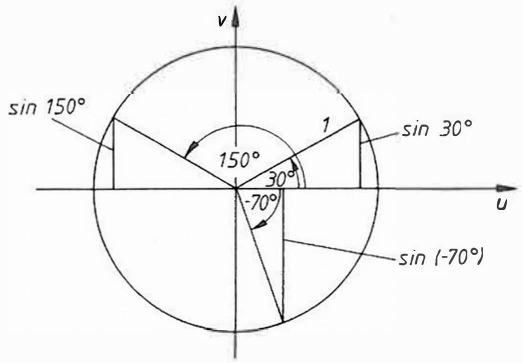
Figuur 3-96
Sinus en cosinus in de eenheidscirkel

De sinus van een hoek tussen 0° en 90° blijkt dus de *ordinaat-waarde* (of y-waarde) van het punt P op de eenheidscirkel te zijn. We gebruiken dit resultaat om de definitie van de sinus uit te breiden voor willekeurige (positieve of negatieve) hoeken:

> **Definitie:** We verstaan onder de *sinus* van een willekeurige hoek α de y-waarde (*ordinaat-waarde*) van het bij α behorende punt P op de eenheidscirkel (figuur 3-96).

■ **Voorbeeld**

In figuur 3-97 zijn de functiewaarden sin 30°, sin 150° en sin (–70°) weergegeven.



Figuur 3-97

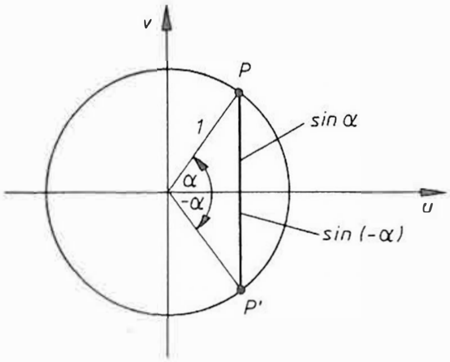
■

Als de hoek α de eenheidscirkel doorloopt, neemt α alle waarden tussen 0° en 360° aan. De sinusfunctie sin α doorloopt dan alle waarden tussen –1 en +1. Als α nog eens de eenheidscirkel doorloopt (dat wil zeggen α neemt alle waarden tussen 360° en 720° aan), doorloopt de sinusfunctie opnieuw alle waarden tussen –1 en +1. Dus is de sinusfunctie een *periodieke* functie met periode p = 360° (of 2 π radialen):

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin\alpha \qquad (3\text{-}126)$$

Als de hoek α de eenheidscirkel *met de klok mee* doorloopt, komt er een min-teken voor alle functiewaarden; dit betekent dat sin α een *oneven* functie is (figuur 3-98):

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad (3\text{-}127)$$



Figuur 3-98

De cosinusfunctie in de eenheidscirkel

De cosinus van een hoek α blijkt de x-waarde (of *absis-waarde*) van het punt P op de eenheidscirkel te zijn (figuur 3-96). Dit volgt meteen uit de definitie (3-118) van de cosinus:

$$\cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{hypotenusa}} = \frac{\text{absis van } P}{1} = \text{absis van } P \qquad (3\text{-}128)$$

Net als bij de sinus breiden we ook de definitie van de *cosinusfunctie* uit voor een *willekeurige* hoek α. Ook de cosinus is een *periodieke* functie met periode p = 360° (in radialen: $p = 2\pi$):

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos\alpha \qquad (3\text{-}129)$$

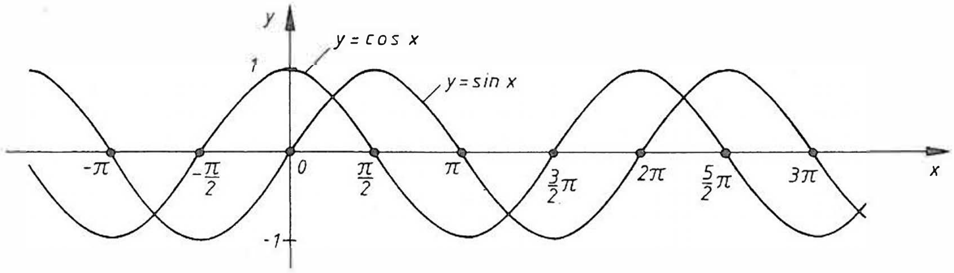
De cosinusfunctie is (in tegenstelling tot de sinusfunctie) een *even* functie:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad (3\text{-}130)$$

2.2 Sinus-,cosinus- en tangensfunctie.

Sinus- en cosinusfunctie

Meestal worden de *sinus- en cosinusfunctie* toegepast (bijvoorbeeld bij oscillaties) als functie van een hoek x in *radialen*: $y = \sin x$, $y = \cos x$. We kunnen de eigenschappen van deze functies meteen aflezen uit de grafieken in figuur 3-99; deze eigenschappen staan nog eens vermeld in tabel 3-1.



Figuur 3-99 De grafieken van de sinus-en cosinusfunctie

Tabel 3-1 Eigenschappen van de sinus- en cosinusfunctie ($k \in \mathbb{Z}$)

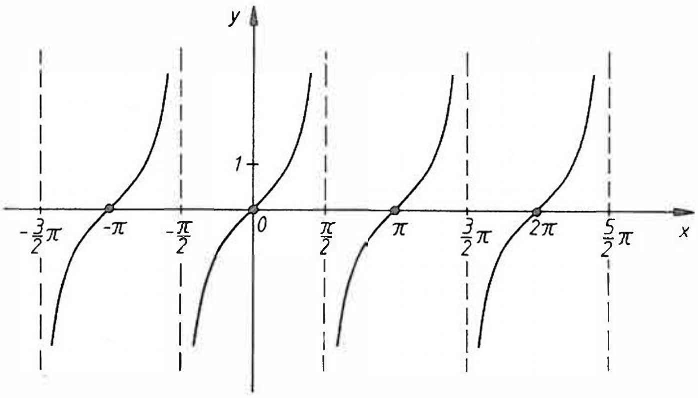
	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Domein	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Bereik	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$
Periode	2π	2π
Symmetrie	oneven	even
Nulpunten	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Relatieve maxima	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$x_k = k \cdot 2\pi$
Relatieve minima	$x_k = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	$x_k = \pi + k \cdot 2\pi$

Tangens- en cotangensfunctie

We definiëren de *tangens- en cotangensfunctie* met de formules (3-119) en (3-120) voor alle hoeken x:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \tag{3-131}$$

We kunnen de eigenschappen van deze functies afleiden uit de eigenschappen van de sinus- en cosinusfunctie (zie tabel 3-2). In de figuren 3-100 en 3-101 staan de grafieken van $y = \tan x$ en $y = \cot x$.



Figuur 3-100 De grafiek van $y = \tan x$

Tabel 3-2 Eigenschappen van de tangensfunctie ($k \in \mathbb{Z}$)

	$y = \tan x$
Domein	$x \in \mathbb{R}$ met uitzondering van de punten $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Bereik	$-\infty < y < \infty$
Periode	π
Symmetrie	oneven
Nulpunten	$x_k = k \cdot \pi$
Polen	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Verticale asymptoten	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

2.3 Belangrijke relaties tussen de goniometrisch functies.

Er bestaan veel *relaties* tussen de vier goniometrische functies. We bespreken er hier een paar die vaak voorkomen.

We zien meteen in figuur 3-99 dat we de *cosinuskromme* kunnen beschouwen als een *sinuskromme* die $\pi/2$ naar *links* verschoven is. Dus geldt:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3-132}$$

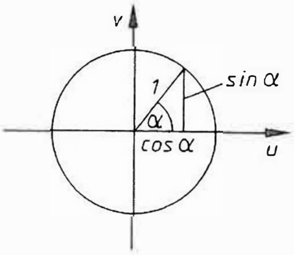
Net zo kunnen we de *sinuskromme* krijgen door de *cosinuskromme* $\pi/2$ naar *rechts* te verschuiven. Hieruit volgt de relatie:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tag{3-133}$$

Verder bestaat tussen de sinus- en cosinusfunctie de volgende belangrijke relatie (zie figuur 3-102):

Stelling van Pythagoras voor goniometrische functies

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{3-134}$$



Figuur 3-102
De stelling van Pythagoras voor goniometrische functies

Verder gebruiken we ook vaak de *som- en verschilformules* voor sinus, cosinus en tangens (x_1, x_2 zijn hoeken):

Som- en verschilformules voor de sinus-, cosinus- en tangensfunctie

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \tag{3-135}$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2 \tag{3-136}$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2} \tag{3-137}$$

Hieruit leiden we de volgende formules af:

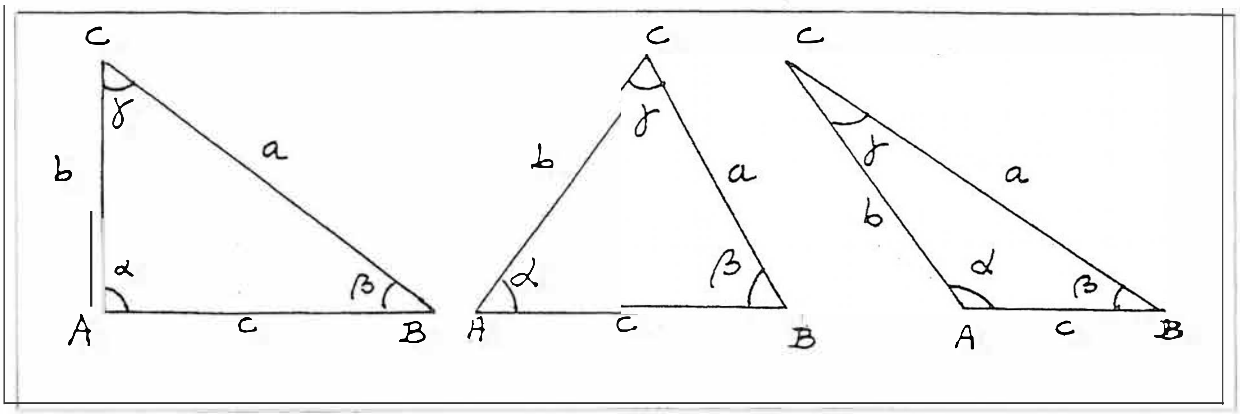
$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \tag{3-138}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{3-139}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right] \tag{3-140}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2x)\right] \tag{3-141}$$

2.4 Het oplossen van willekeurige driehoeken
Cosinus- en sinusregel.



Sinusregel:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

Let op:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

2.5 Oefeningen

1.Bereken $\sin\alpha$ en $tg\alpha$ indien $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ en $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2.Duid op de goniometrische cirkel het punt aan van de corresponderende hoek(en):

a. $tg\alpha = -\frac{3}{2}$

b. $\sin\alpha = 0{,}7$

3.Herleid de volgende goniometrische getallen tot goniometrische getallen van hoeken van het eerste kwadrant:

a. $\cos\frac{67\pi}{8}$

b. $\mathrm{tg}\,1125°$

c. $\sin(\frac{-7\pi}{13})$

d. $\cos(-\frac{3\pi}{22})$

e. $tg\,233°14'17''$

f. $\sin(-\frac{31\pi}{8})$

g. $tg\frac{50\pi}{7}$

4. **Vraagstukken**

Bij de volgende oefeningen moet men steeds alle ontbrekende hoeken en zijden van de driehoek berekenen. Maak steeds een tekening!

1) Gegeven: $a = 30, b = 50, \gamma = 25°$
Los de driehoek op.

2) Los de driehoek op met $a = 17, b = 23, c = 32$

3) Gegeven: $\alpha = 52°20', \beta = 28°10', c = 87{,}6$
Los op.

4) Gegeven: a=5, b=8, c=10
Gevraagd: α, β, γ

5) Gegeven: $\gamma = 90°, a = 3, b = 4$
Zoek: c, α, β

6) Gegeven: a=675, $\alpha = 48°36', \gamma = 90°$
Zoek: b, c, β

7) Gegeven: a=137 , c=78,0 , $\gamma = 23°$
Zoek de overige onbekenden.
Opgelet: er zijn 2 verschillende oplossingen.

8) Gegeven: a=6, b=9, $\gamma = 60°$
Zoek c, α, β

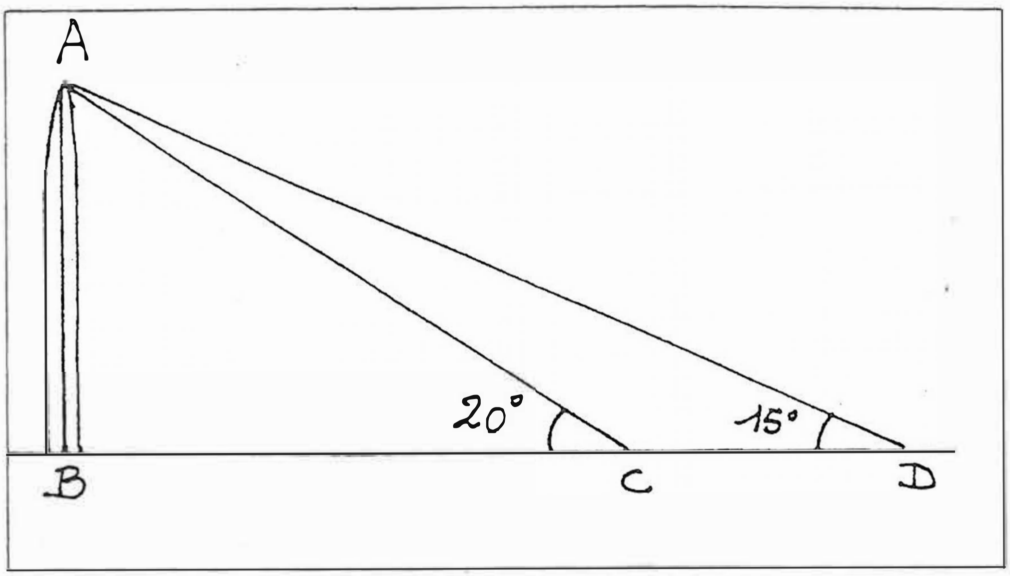
9) Gegeven: a=43, b=32, $\beta = 67°$
Zoek alle overige zijden en hoeken.

10) Gegeven: b=16,351 , c=11,189 , $\alpha = 42°19,8'$
Zoek alle overige zijden en hoeken.

11) Gegeven: b=47, $\alpha = 20°43', \gamma = 153°44'$

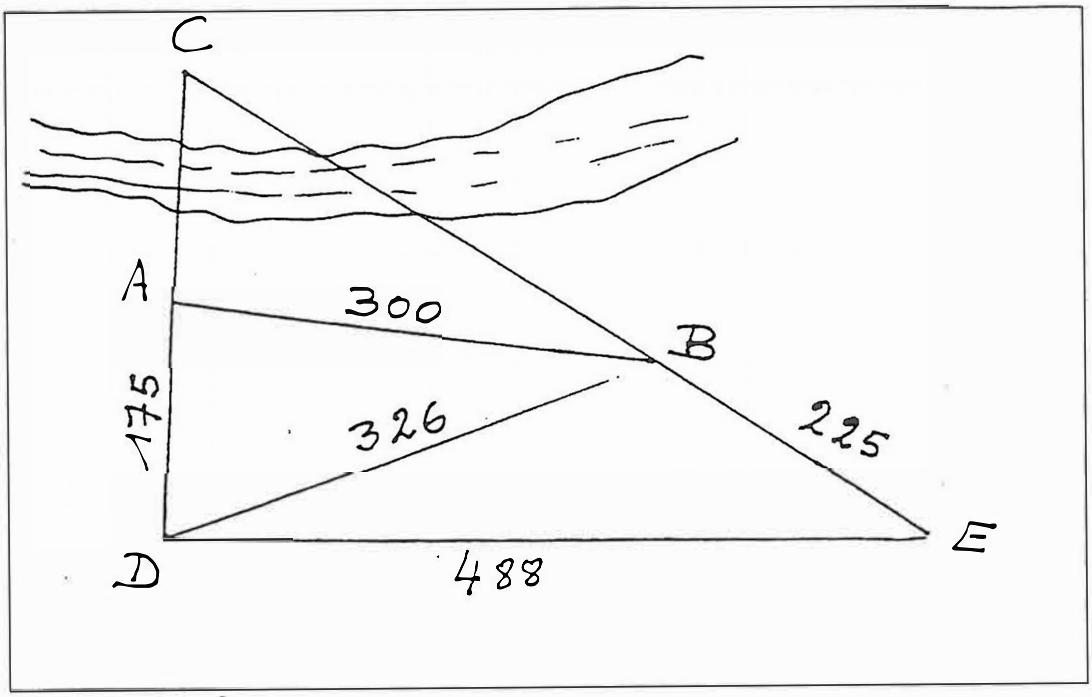
Los de driehoek op.

12)



Om de hoogte van een toren te bepalen doet men 2 hoekmetingen. Uit punt C ziet men de top A onder een hoek van 20° en vanuit punt D, dat 200m verder ligt, ziet men A onder een hoek van 15°.
Bepaal de hoogte van de toren.

13)



Men wenst de afstanden van het punt C tot de punten A en B te kennen.
Deze afstanden kunnen echter niet rechtstreeks worden gemeten.
Men verlengt het lijnstuk CA tot in D gelegen op een afstand van 175m van A.
In het verlengde van het lijnstuk CB bepaalt men een punt E gelegen op een afstand van 225 cm van B.
De gemeten afstanden tussen respectievelijk A en B; D en B; D en E zijn op de figuur aangeduid.
Bereken de afstanden AC en BC.

14) Een vuurtoren is 35m hoog. Hoe ver is een schip van deze vuurtoren verwijderd als men hem ziet onder een hoek van 3°7'?

15) Los de driehoek ABC op waarvan:
$a = 132, b = 224, \gamma = 28°40'$

16) Los de driehoek op waarvan: $\alpha = 20°43', b = 47, \gamma = 153°44'$

17) Los de driehoek op waarvan:
a=31,5 ; b=51,8 ; $\alpha = 33°40'$
Opgelet: er zijn 2 oplossingen!

Universiteit Hasselt

Faculteit architectuur en kunst

Opleiding architectuur

Introductiecursus wiskunde

Module 3 :

Differentiaalrekenen

Verantwoordelijke docent : Prof. dr. Erik Nuyts

Hoofdauteur: ir. Lut Van den Bosch

Lesgever : nog te bepalen

Juli 2020

Module 3 : Differentiaalrekenen.

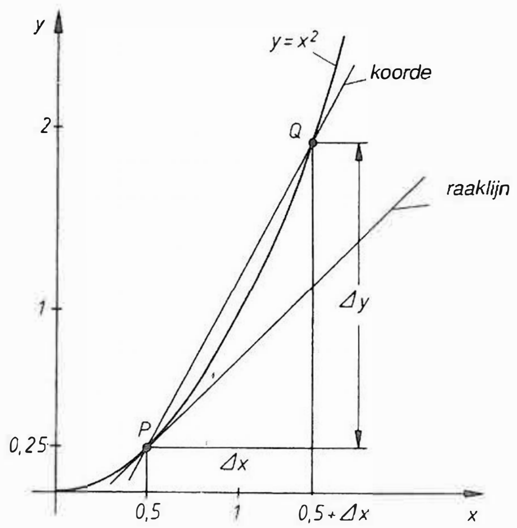
3.1 Afgeleide van een functie : definitie en meetkundige betekenis.

Het probleem van de raaklijn aan een kromme

We gaan de *differentiaalrekening* aan de hand van een voorbeeld introduceren. We bekijken in dit voorbeeld de parabool met de functievergelijking $y = f(x) = x^2$. Ons doel is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme in het punt $x_0 = 0{,}5$ (dus in het punt $P = (0{,}5,\, 0{,}25)$ van de kromme) te bepalen. We lossen dit probleem als volgt op:

(1) We kiezen in de omgeving van P een ander (van P *verschillend*) punt Q van de parabool (zie figuur 4-1). Als het verschil van de x-coördinaten van de twee punten Δx is, zijn de coördinaten van de punten als volgt:

$$\begin{aligned} P &= (0{,}5\,,\ 0{,}25) \\ Q &= (0{,}5 + \Delta x\,, (0{,}5 + \Delta x)^2) \end{aligned} \qquad (4\text{-}1)$$



Figuur 4-1

De richtingscoëfficiënt van de *koorde* (secans) door P en Q is dus:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0{,}5 + \Delta x)^2 - 0{,}25}{\Delta x} = \frac{0{,}25 + \Delta x + (\Delta x)^2 - 0{,}25}{\Delta x} = \\ &= \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 1 + \Delta x \end{aligned} \qquad (4\text{-}2)$$

Deze lijn is een *eerste benadering* van de gezochte raaklijn. De richtingscoëfficiënt m_s van de koorde hangt natuurlijk nog van Δx (dus van de positie van het punt Q) af.

(2) We laten nu het punt Q *langs* de parabool naar het punt P toe 'wandelen' ($Q \to P$). Het verschil van de x-coördinaten Δx nadert dan naar nul ($\Delta x \to 0$). In de limiet gaat de *koorde* over in de *raaklijn* (tangente) en dus de richtingscoëfficiënt m_s in de richtingscoëfficiënt m_t. In ons voorbeeld krijgen we:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1 \qquad (4\text{-}3)$$

De raaklijn aan de kromme in het punt $P = (0{,}5,\ 0{,}25)$ heeft dus de richtingscoëfficiënt $m_t = 1$. We noteren dit als volgt:

$$y'(0{,}5) = f'(0{,}5) = 1 \qquad (4\text{-}4)$$

(lees: y accent in het punt 0,5 of f accent in het punt 0,5). We noemen deze limiet de *afgeleide* van de functie $y = f(x) = x^2$ in het punt 0,5 en we noemen de functie in dit punt *differentieerbaar*.

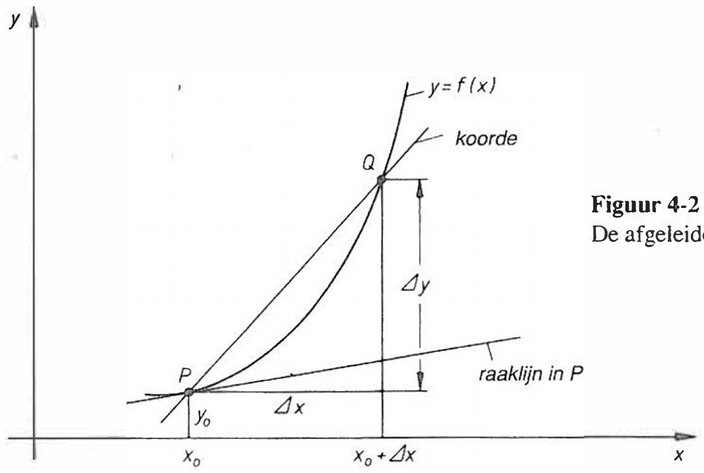
De afgeleide van een functie

We formuleren nu het probleem van de vorige paragraaf wat algemener: gegeven is een functie $y = f(x)$, we zoeken de richtingscoëfficiënt van de *raaklijn aan de kromme* in het punt x_0, dat wil zeggen in het punt $P = (x_0, y_0)$ van de kromme $(y_0 = f(x_0))$.

De oplossing gaat in twee stappen:

(1) We kiezen eerst op de kromme in de buurt van $P = (x_0, y_0)$ een (van P verschillend) punt Q (zie figuur 4-2). Als we het verschil van de x-coördinaten van de twee punten weer Δx noemen, hebben P en Q de volgende coördinaten:

$$P = (x_0, y_0) \quad \text{met} \quad y_0 = f(x_0)$$
$$Q = (x_0 + \Delta x;\ f(x_0 + \Delta x)) \tag{4-5}$$



Figuur 4-2
De afgeleide van een functie

De richtingscoëfficiënt van de *koorde* door P en Q is dan gelijk aan het volgende *differentiequotiënt*:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{4-6}$$

(2) Als Q nu *langs* de kromme naar P toe 'wandelt' ($Q \to P$), nadert *tegelijkertijd* het verschil $\Delta x \to 0$ en in de *limiet* gaat de *koorde* over in de gezochte *raaklijn. De richtingscoëfficiënt m_t van de raaklijn is dus de limiet van de richtingscoëfficiënt m_s van de koorde*, dat wil zeggen de limiet van het differentiequotiënt (4-6) voor $\Delta x \to 0$:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{4-7}$$

We noemen deze limiet (als hij bestaat) de *afgeleide van de functie* $y = f(x)$ *in het punt* x_0 en we noteren deze limiet met één van de volgende symbolen:

$$y'(x_0),\ f'(x_0),\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} \tag{4-8}$$

Het quotiënt $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$ noemen we het *differentiaalquotiënt* van de functie $y = f(x)$ in het punt $x = x_0$ (lees: *dy dx* in het punt $x = x_0$); we komen hier later nog op terug.

Definitie: We noemen een functie $y = f(x)$ in het punt x_0 *differentieerbaar* als de limiet (4-7) bestaat. We noemen deze limiet de *afgeleide van* $y = f(x)$ *in het punt* x_0 of het *differentiaalquotiënt van* $y = f(x)$ *in het punt* $x = x_0$; we noteren de limiet als volgt:

$$y'(x_0), f'(x_0) \text{ of } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0} \tag{4-9}$$

Opmerkingen

(1) De afgeleide $y'(x_0)$ wordt ook wel de *1e afgeleide* genoemd.

(2) Het bepalen van de afgeleide, dus het berekenen van de limiet (4-7), noemen we *differentiëren.*

(3) *Meetkundige interpretatie* van de afgeleide: als een functie $y = f(x)$ in het punt x_0 differentieerbaar is, betekent dat dat de kromme in dit punt een *eenduidig* bepaalde raaklijn heeft met een *eindige* richtingscoëfficiënt.

De afgeleide functie $y'(x) = f'(x)$ kent aan ieder punt x in een interval I de *richtingscoëfficiënt* (limiet (4-7)) toe. We noemen deze functie kortweg de *afgeleide* van $y = f(x)$.

Een andere bruikbare notatie voor de afgeleide van een functie geeft de *differentiaaloperator* $\frac{d}{dx}$. Deze operator maakt van de functie $y = f(x)$ de *afgeleide functie* $y' = f'(x)$:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = y' = f'(x) \tag{4-10}$$

■ **Voorbeelden**

(1) $y = f(x) = \text{const.} = a \Rightarrow y' = f'(x) = 0$

Differentiequotiënt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a - a}{\Delta x} = 0$

1e afgeleide: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (0) = 0$

(2) $y = f(x) = x \Rightarrow y' = f'(x) = 1$

Differentiequotiënt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

1e afgeleide: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (1) = 1$

(3) $y = f(x) = x^2 \Rightarrow y' = f'(x) = 2x$

Differentiequotiënt:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$
$$= \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$
$$= \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

1e afgeleide: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

Als we de *differentiaaloperator* gebruiken, kunnen we ook schrijven:

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Zo is bijvoorbeeld de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $x_1 = 0{,}5$:

$$y'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$$

en in het punt $x_2 = 1$:

$$y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

3.2 De afgeleide van elementaire functies.

De afgeleiden van de elementaire functies

Functie $f(x)$		Afgeleide $f'(x)$
Machtfunctie	x^n	nx^{n-1}
Goniometrische functies	$\sin x$	$\cos x$
	$\cos x$	$-\sin x$
	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
Arcfuncties	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentiële functies	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logaritmische functies	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbolische functies	$\sinh x$	$\cosh x$
	$\cosh x$	$\sinh x$
	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
Areafuncties	$\text{arsinh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$\text{arcosh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
	$\text{artanh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
	$\text{arcoth}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

3.3 Regels voor het differentiëren

3.3.1 De factorregel

De factorregel

Een *constante* factor blijft bij het differentiëren onveranderd:

$$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x) \qquad (4\text{-}15)$$

- **Voorbeelden**

(1) $y = 10\,x^4 \Rightarrow y' = 10\,\frac{d}{dx}(x^4) = 10 \cdot 4\,x^3 = 40\,x^3$

(2) $y = -3 \cdot e^x \Rightarrow y' = -3\,\frac{d}{dx}(e^x) = -3 \cdot e^x$

(3) $x = 4 \cdot \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4\,\frac{d}{dt}(\sin t) = 4 \cdot \cos t$

3.3.2 De somregel

De somregel

Een eindige som van functies mag *term voor term* gedifferentieerd worden:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow$$
$$y' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x) \qquad (4\text{-}17)$$

- **Voorbeelden**

(1) $y = 4\,x^7 + 3 \cdot \cos x - 5 \cdot e^x + \ln x \Rightarrow y' = 28\,x^6 - 3 \cdot \sin x - 5 \cdot e^x + \frac{1}{x}$

(2) $y = 4 \cdot \arctan x - 2 \cdot \arccos x + 10 \cdot \sinh x + 3\,x \Rightarrow$

$$y' = \frac{4}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 10 \cdot \cosh x + 3$$

■

3.3.3 De produktregel

De produktregel

Het differentiëren van een functie $y = u(x) \cdot v(x)$ (deze functie is te schrijven als het *produkt* van twee functies) gaat volgens de *produktregel*:

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) \qquad (4\text{-}19)$$

- **Voorbeelden**

(1) $y = (4x^3 - 3x)(2e^x - \sin x)$

$u = 4x^3 - 3x, \quad u' = 12x^2 - 3$

$v = 2e^x - \sin x, \quad v' = 2e^x - \cos x$

$$y' = u'v + v'u = (12x^2 - 3)(2e^x - \sin x) + (2e^x - \cos x)(4x^3 - 3x) =$$
$$= (8x^3 + 24x^2 - 6x - 6)e^x - (12x^2 - 3)\sin x - (4x^3 - 3x)\cos x$$

(2) $y = 4 \cdot \arctan x \cdot \ln x$

$u = 4 \cdot \arctan x, \quad u' = \dfrac{4}{1 + x^2}$

$v = \ln x, \quad v' = \dfrac{1}{x}$

$$y' = u'v + v'u = \frac{4 \cdot \ln x}{1 + x^2} + \frac{4 \cdot \arctan x}{x}$$ ■

De produktregel voor drie factorfuncties

$$\frac{d}{dx}(uvw) = u'vw + uv'w + uvw' \qquad (4\text{-}23)$$

- **Voorbeeld**

$y = 5x^3 \cdot \sin x \cdot e^x$

$u = 5x^3, \quad u' = 15x^2$

$v = \sin x, \quad v' = \cos x$

$w = e^x, \quad w' = e^x$

$$y' = u'vw + uv'w + uvw' = 15x^2 \cdot \sin x \cdot e^x + 5x^3 \cdot \cos x \cdot e^x + 5x^3 \cdot \sin x \cdot e^x =$$
$$= 5x^2 \cdot e^x (3 \cdot \sin x + x \cdot \cos x + x \cdot \sin x)$$ ■

3.3.4 De quotiëntregel

De quotiëntregel

Het differentiëren van een functie die geschreven kan worden als het *quotiënt* van twee functies: $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, gaat volgens de *quotiëntregel*

$$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)} \qquad (4\text{-}24)$$

■ **Voorbeelden**

(1) $y = \dfrac{x^3 - 4x + 5}{2x^2 - 4x + 1}$

$u = x^3 - 4x + 5, \quad u' = 3x^2 - 4$

$v = 2x^2 - 4x + 1, \quad v' = 4x - 4$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(3x^2 - 4)(2x^2 - 4x + 1) - (4x - 4)(x^3 - 4x + 5)}{(2x^2 - 4x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 20x + 16}{(2x^2 - 4x + 1)^2}$$

(2) $y = \dfrac{\ln x + x}{e^x}$

$u = \ln x + x, \quad u' = \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{1 + x}{x} = \dfrac{x + 1}{x}$

$v = e^x, \quad v' = e^x$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\frac{x+1}{x}e^x - e^x(\ln x + x)}{e^{2x}} = \frac{\frac{x+1}{x} - (\ln x + x)}{e^x} =$$

$$= \frac{x + 1 - x(\ln x + x)}{x\,e^x}$$

■

3.3.5 De kettingregel

Met de regels voor het differentiëren die we tot nu toe behandeld hebben (de factorregel, de somregel, de produkt- en de quotiëntregel) kunnen we eenvoudige functies differentiëren. We hebben echter *niet* genoeg aan deze regels als we *samengestelde* functies moeten differentiëren. We kunnen bijvoorbeeld niet met genoemde regels de functie $y = \sin(3x - 4)$ of $y = 2 \cdot e^{4x^2}$ differentiëren. Daarvoor hebben we een vijfde regel, de *kettingregel*, nodig.
We gaan uit van het volgende:
met een geschikte *substitutie* $u = u(x)$ proberen we de gegeven functie $y = f(x)$ te transformeren in een *elementaire* functie $y = F(u)$. We duiden de functies $u = u(x)$ en $y = F(u)$ als volgt aan:

$u = u(x)$: *binnenste* functie

$y = F(u)$: *buitenste* functie

Tussen deze functies bestaat de volgende relatie:

$$y = F(u) = F(u(x)) = f(x) \qquad (4\text{-}25)$$

De gezochte afgeleide van de functie $y = f(x)$ naar de variabele x is dan het *produkt* van de *afgeleiden* van de *buitenste* en de *binnenste* functie:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{4-26}$$

(de *kettingregel*). We hebben het probleem dus opgelost als de buitenste en de binnenste functie *elementair*, dat wil zeggen met de bekende regels *differentieerbaar* zijn. We noemen:

$\frac{dy}{du}$: de *buitenste afgeleide* (de afgeleide van de buitenste functie $y = F(u)$) en:

$\frac{du}{dx}$: de *binnenste afgeleide* (de afgeleide van de binnenste functie $u = u(x)$),

en kunnen nu de kettingregel als volgt formuleren:

Kettingregel

De afgeleide van een *samengestelde* functie $y = F(u(x)) = f(x)$ is het produkt van de buitenste en de binnenste afgeleide:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{4-27}$$

- **Voorbeelden**

(1) $y = 3 \cdot \sin(5x)$

Substitutie: $u = u(x) = 5x$

Buitenste functie: $y = F(u) = 3 \cdot \sin u$

Binnenste functie: $u = u(x) = 5x$

Buitenste afgeleide: $\frac{dy}{du} = 3 \cdot \cos u = 3 \cdot \cos(5x)$

Binnenste afgeleide: $\frac{du}{dx} = 5$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot \cos(5x) \cdot 5 = 15 \cdot \cos(5x)$$

(2) $y = (3x - 4)^8$

Substitutie: $u = u(x) = 3x - 4$

Buitenste functie: $y = F(u) = u^8 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 8u^7$

Binnenste functie: $u = u(x) = 3x - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 8u^7 \cdot 3 = 24u^7 = 24(3x - 4)^7$$

(3) $y = e^{4x^2 - 3x + 2}$

Substitutie: $u = u(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Buitenste functie: $y = F(u) = e^u \Rightarrow \frac{dy}{du} = e^u$

Binnenste functie: $u = u(x) = 4x^2 - 3x + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x - 3$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u(8x - 3) = (8x - 3)\,e^{4x^2 - 3x + 2}$$

3.4 Oefeningen

1) Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x^3$ door de *definitieformule* (de limiet van het *differentiaalquotiënt*) toe te passen

a) in het punt $x_0 = 1$ b) in het punt x_0

2) Differentieer de volgende functies door de *machtregel* toe te passen:

a) $y = 4\,x^5$ b) $y = 2 \cdot x^{a+1}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$

d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ e) $y = \sqrt[3]{x^4}$ f) $y = x^{\frac{1}{2}}$

3) Differentieer de volgende functies door de *somregel* toe te passen:

a) $y = -10\,x^4 + 2\,x^3 - 2$ b) $z\,(t) = a \cdot \cos t - t^2 + e^t + 1$

c) $y = \dfrac{10}{x^3} - 3 \cdot \lg x + \tan x$ d) $y = 4 \cdot \sqrt[3]{x^5} - 4 \cdot e^x + \sin x$

4) Differentieer de volgende functies door de *produktregel* toe te passen:

a) $y = (4\,x^3 - 2\,x + 1)\,(x^2 - 2\,x + 5)$ b) $y = \tan^2 x$

c) $y = \sin x \cdot \cos x$ d) $y = (3\,x + 5\,x^2 - 1)^2$ e) $y = 2\,x \cdot \ln x$

f) $y = e^t \cdot \cos t$ g) $y = x^n \cdot e^x$ h) $y = \ln x \cdot \cosh x$

i) $y = x^2 \cdot \arcsin x$ j) $y = 2\,x \cdot e^x \cdot \cos x$

5) Differentieer de volgende functies door de *quotiëntregel* toe te passen:

a) $y = \dfrac{5\,x^5 - 6\,x^2 + 1}{x^2 + 2\,x + 1}$ b) $y = \dfrac{10\,x}{x^2 + 1}$ c) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

d) $y = \dfrac{2\,x^3 - 6\,x^2 + x - 3}{x^3 - 5\,x}$ e) $y = e^{-x} \cdot \ln x$ f) $y = \dfrac{x^{1/2} - x^2}{x^2 + 1}$

g) $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ h) $y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ i) $y = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

j) $y = \dfrac{\arctan x}{e^x}$ k) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

6) Differentieer de volgende functies door de *kettingregel* toe te passen:

a) $y = 5\,(4\,x^3 - x^2 + 1)^5$ b) $y = \dfrac{10}{x^3 - 2\,x + 5}$

c) $y = \sin\,(x + 2)$ d) $y = 2 \cdot \cos\,(10\,t - \pi/3)$

e) $y = 3 \cdot e^{-4x}$ f) $y = \sin^2\,(2\,x - 4)$

g) $y = 2 \cdot \ln\,(x^3 - 2\,x)$ h) $y = e^{x^2 - 2x + 5}$

i) $y = \arccos \sqrt{x^2 - 1}$ j) $y = \arctan\,(x^2 + 1)$

k) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4\,x + 10)^2}$ l) $y = (x^3 - 4\,x + 5)^{-5/3}$

m) $y = 5 \cdot \cos\,(x^2 + 2\,x - 1)^2$ n) $y = \ln |\cos x|$

7) Differentieer de volgende functies met de *kettingregel*:

a) $y = e^{-2t} \cdot \cos t$

b) $u = e^{x \cdot \sin x}$

c) $y = (x^2 - 1)^2 \cdot (x + 5)^3$

d) $y = (2x^2 - 4x + 5) \cdot \sin(2x)$

e) $y = e^{2x} \cdot \arcsin(x - 1)$

f) $z = (2 - 3t) \cdot e^{-5t}$

g) $y = x \cdot \ln(x + e^x)^2$

h) $y = 4^{x \cdot \ln x}$

i) $y = \sin(x^2 + 1) \cdot \cos(4x)$

j) $y = 4 \cdot \cos(x - 4) + \sin(2x + 3)$

k) $y = \ln \frac{1}{x^2} + \ln \frac{x+4}{x}$

l) $y = \ln(\tanh t)$

m) $y = \left(\frac{1+x}{x}\right)^n$

n) $y = 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$

o) $y = \sqrt{\sin x}$

p) $y(t) = A \cdot e^{-at} + B \cdot e^{-bt}$

q) $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

8) Bepaal van de volgende krommen de punten met een *horizontale* raaklijn:

a) $y = 5 \cdot e^{-x^2}$

b) $y = 3(x-2)^2(x-1)$

c) $y = \sin x \cdot \cos x$

d) $y = [1 - e^{-x+2}]^2$

e) $y = 4x^3 - 6x^2 - 9x$

In welke punten van de kromme met functievergelijking $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ lopen de raaklijnen *evenwijdig* met de lijn $y = \frac{1}{4}x - 2$?

10) Bepaal voor de volgende functies de punten van de kromme met een raaklijn *evenwijdig* aan de x-as:

a) $y = x \cdot e^{-x^2}$

b) $y = 5 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^4$

Universiteit Hasselt

Faculteit architectuur en kunst

Opleiding architectuur

Introductiecursus wiskunde

Module 4 :

Integraalrekenen.

Verantwoordelijke docent : Prof. dr. Erik Nuyts

Hoofdauteur: ir. Lut Van den Bosch

Lesgever : nog te bepalen

Juli 2020

Module 4 :
Integraalrekening.

(de onderstaande tekst is een verkorte versie van een deel van hoofdstuk 5 van het boek Wiskunde voor het hoger technisch onderwijs van Lothar Papula (boek dat als handboek gebruikt wordt in 1 bachelor architectuur)

4.1 Integreren als inverse operatie van differentiëren.

Bij de in hoofdstuk 4 behandelde differentiaalrekening is het probleem steeds het bepalen van de *afgeleide* van een gegeven functie $y = f(x)$. Deze handeling noemen we *differentiëren*; schematisch:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{differentiëren}} y' = f'(x) \tag{5-1}$$

We komen in natuurwetenschappelijke/technische toepassingen ook vaak het omgekeerde probleem tegen: van een nog onbekende functie is de *afgeleide* $y' = f'(x)$ bekend en gevraagd wordt de functie zelf te bepalen. Schematisch uitgedrukt:

$$y' = f'(x) \longrightarrow y = f(x)$$

Zo'n probleem komen we vaak in de *mechanica* tegen: van een puntmassa is bijvoorbeeld de *snelheid* (als functie van de tijd): $v = v(t)$ bekend en gevraagd wordt de *afgelegde weg* (als functie van de tijd) $s = s(t)$ te vinden. De snelheid v is immers de 1e afgeleide van de afgelegde weg naar de tijd: $v = \dot{s}$ (zie paragraaf 4.2.13.1).

- **Voorbeelden**

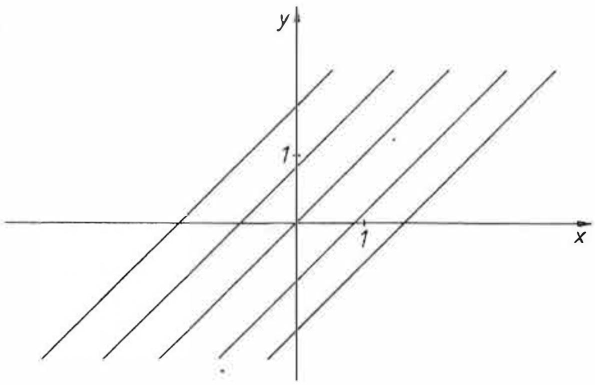
(1) *Gegeven*: $y' = 1$

Gevraagd: *alle* functies $y = f(x)$ met $y' = 1$

Oplossing:

Iedere functie met de vorm $y = x + C$ (*schaar van evenwijdige lijnen*, zie figuur 5-1) is een oplossing van de opgave, omdat

$$y' = \frac{d}{dx}(x + C) = 1$$



Figuur 5-1
Schaar van evenwijdige lijnen $y = x + C$

(C: een willekeurig reëel getal). Bij iedere waarde van C behoort precies één lijn.

(2) *Gegeven*: $y' = 2x$

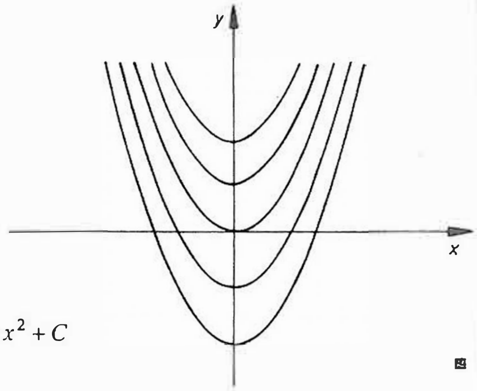
Gevraagd: *alle* functies $y = f(x)$ waarvan de *1e afgeleide* $y' = 2x$

Oplossing:

$y = x^2 + C$ (*schaar van parabolen*, zie figuur 5-2).

Immers, voor iedere (reële) C is

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x$$



Figuur 5-2
Schaar van parabolen $y = x^2 + C$

Stel:

$f(x)$: de *1e afgeleide* van een (nog onbekende) functie;

$F(x)$: iedere functie waarvoor $F'(x) = f(x)$; we noemen deze functies de *primitieve* functies (of stamfuncties) van $f(x)$.

> **Definitie:** Iedere functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$ noemen we een *primitieve* functie van $f(x)$.

Voorbeelden

(1) $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + C$ (figuur 5-2)

(2) $f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x + C$

want:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x = f(x)$$

(3) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{1 + x^2} \Rightarrow F(x) = e^x + \arctan x + C$

want:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(e^x + \arctan x + C) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} = f(x)$$

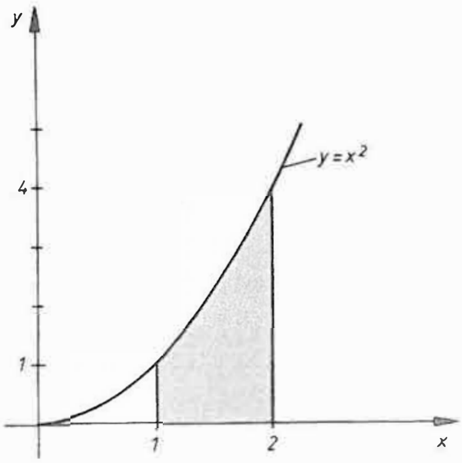
Het bepalen van *alle* primitieve functies heet *integreren*:

> **Definitie:** Het bepalen van *alle* primitieve functies $F(x)$ van een gegeven functie $f(x)$ noemen we *integreren*:
>
> $$f(x) \xrightarrow{\text{integreren}} F(x) \text{ met } F'(x) = f(x) \qquad (5\text{-}4)$$

We kunnen integreren dus beschouwen als de inverse operatie van differentiëren: door te *differentiëren* vinden we de afgeleide van een functie, door te *integreren* vinden we *alle primitieve functies* van een gegeven (afgeleide) functie.

4.2. Het bepalen van een oppervlakte : de bepaalde integraal

We willen de *oppervlakte* van het vlak tussen de parabool $y = f(x) = x^2$ en de x-as in het interval $1 \leq x \leq 2$ berekenen (zie figuur 5-3).



Figuur 5-3
Bepalen van de oppervlakte van het vlak tussen de parabool $y = x^2$ en de x-as in het interval $1 \leq x \leq 2$

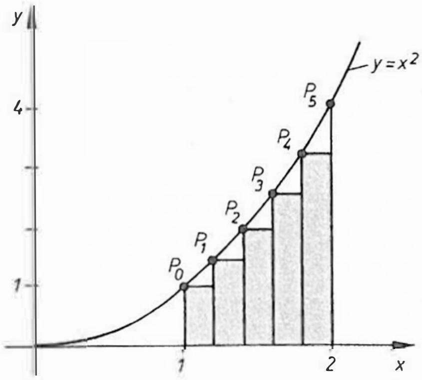
We gaan als volgt te werk:

(1) We verdelen het oppervlak in een groot aantal (n) *strookjes* met breedte Δx.

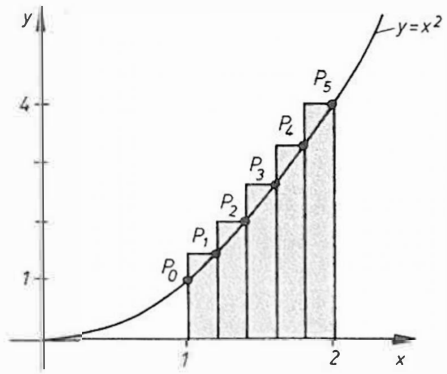
(2) Ieder strookje wordt vervangen door een *rechthoekje*.

(3) De oppervlakte A is dan *bij benadering* gelijk aan de som van de oppervlakten van de rechthoekjes.

(4) Hierbij geldt: *hoe groter het aantal strookjes, des te beter de benadering*! Voor $n \to \infty$ nadert de som van de oppervlakten van de rechthoekjes naar de oppervlakte A.



Figuur 5-4 De ondersom



Figuur 5-5 De bovensom

We bekijken nu de methode voor een verdeling in 5, 10 en 20 stroken.

Verdeling in $n = 5$ stroken

Strookbreedte: $\Delta x = 0{,}2$.

De deelpunten $P_0, P_1, \ldots, P_5$ op de parabool hebben de volgende coördinaten (zie de figuren 5-4 en 5-5):

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	1^2	$1{,}2^2$	$1{,}4^2$	$1{,}6^2$	$1{,}8^2$	2^2

Ondersom

Iedere strook wordt door een iets te *kleine* rechthoek vervangen (het linkerhoekpunt is telkens een deelpunt en dus is de hoogte van een rechthoekje gelijk aan de y-waarde van een randpunt, zie figuur 5-4). De som van de oppervlakten van deze rechthoekjes noemen we de *ondersom* O_5:

$$\begin{aligned} O_5 &= 1^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}8^2 \cdot 0{,}2 = \\ &= (1^2 + 1{,}2^2 + 1{,}4^2 + 1{,}6^2 + 1{,}8^2) \cdot 0{,}2 = 2{,}04 \end{aligned} \tag{5-5}$$

Bovensom

Nu vervangen we iedere strook door een iets te *grote* rechthoek (nu is het rechterhoekpunt telkens een deelpunt, zie figuur 5-5). De som van de oppervlakten van deze rechthoekjes noemen we de *bovensom* B_5:

$$\begin{aligned} B_5 &= 1{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}2 = \\ &= (1{,}2^2 + 1{,}4^2 + 1{,}6^2 + 1{,}8^2 + 2^2) \cdot 0{,}2 = 2{,}64 \end{aligned} \tag{5-6}$$

De gezochte oppervlakte A ligt tussen de onder- en de bovensom:

$$O_5 \le A \le B_5 \quad \text{dus} \quad 2{,}04 \le A \le 2{,}64 \tag{5-7}$$

Het verschil tussen de onder- en de bovensom is 0,6, dus deze benadering is niet nauwkeurig genoeg.

Verdeling in $n = 10$ stroken

Strookbreedte: $\Delta x = 0{,}1$.

We vinden nu voor de *onder*- en de *bovensom* de volgende waarden:

$$\begin{aligned} O_{10} &= 1^2 \cdot 0{,}1 + 1{,}1^2 \cdot 0{,}1 + 1{,}2^2 \cdot 0{,}1 + \ldots + 1{,}9^2 \cdot 0{,}1 = \\ &= (1^2 + 1{,}1^2 + 1{,}2^2 + \ldots + 1{,}9^2) \cdot 0{,}1 = 2{,}185 \end{aligned} \tag{5-8}$$

$$\begin{aligned} B_{10} &= 1{,}1^2 \cdot 0{,}1 + 1{,}2^2 \cdot 0{,}1 + 1{,}3^2 \cdot 0{,}1 + \ldots + 2^2 \cdot 0{,}1 = \\ &= (1{,}1^2 + 1{,}2^2 + 1{,}3^2 + \ldots + 2^2) \cdot 0{,}1 = 2{,}485 \end{aligned} \tag{5-9}$$

Nu geldt:

$$O_{10} \le A \le B_{10}, \quad \text{dus} \quad 2{,}185 \le A \le 2{,}485 \tag{5-10}$$

Het verschil tussen de onder- en de bovensom is nu nog maar 0,3. We kunnen de precisie vergroten door het aantal stroken nogmaals te verdubbelen.

Verdeling in $n = 20$ stroken

Strookbreedte: $\Delta x = 0{,}05$.

$$O_{20} = (1^2 + 1{,}05^2 + 1{,}10^2 + \ldots + 1{,}95^2) \cdot 0{,}05 = 2{,}25875 \tag{5-11}$$

$$B_{20} = (1{,}05^2 + 1{,}10^2 + 1{,}15^2 + \ldots + 2^2) \cdot 0{,}05 = 2{,}40875 \tag{5-12}$$

$$O_{20} \le A \le B_{20}, \quad \text{dus} \quad 2{,}25875 \le A \le 2{,}40875 \tag{5-13}$$

Het *verschil* tussen de onder- en de bovensom is weer *kleiner* geworden en bedraagt nu nog maar 0,15.

De limiet voor $n \to \infty$

Door het aantal stroken groter te maken wordt de ondersom *groter* en de bovensom *kleiner*; het *verschil* tussen onder- en bovensom wordt dus *kleiner*; de volgende uitkomsten voor onderverdelingen in 5, 10, 20, 50, 100 en 1000 stroken maken dit duidelijk:

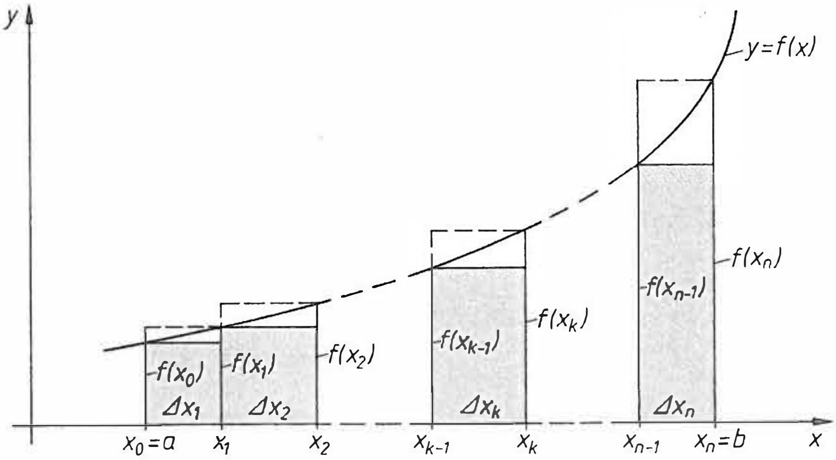
n	5	10	20	50	100	1000
O_n	2,04	2,185	2,25875	2,3034	2,31835	2,3318335
B_n	2,64	2,485	2,40875	2,3634	2,34835	2,3348335
$B_n - O_n$	0,6	0,3	0,15	0,06	0,03	0,003

Als we het aantal stroken *onbeperkt vergroten*, dus als $n \rightarrow \infty$, naderen de onder- en de bovensom naar eenzelfde limiet, namelijk de *oppervlakte A*. In ons voorbeeld is deze limiet gelijk aan (we tonen dit later aan):

$$A = \lim_{n \to \infty} O_n = \lim_{n \to \infty} B_n = \frac{7}{3} \qquad (5\text{-}14)$$

De bepaalde integraal

We geven het in paragraaf 5.2.1 behandelde probleem nu in een *algemenere* vorm. We veronderstellen eerst (om het begrip integraal zo *duidelijk* mogelijk te kunnen uitleggen) dat de functie $y = f(x)$ in het hele interval $a \le x \le b$ *continu* is en *monotoon stijgt* en dat de grafiek *boven* de x-as ligt (zie figuur 5-6). Gevraagd wordt nu de *oppervlakte A* van het vlak tussen de kromme $y = f(x)$ en de x-as in het interval $a \le x \le b$ te berekenen. We gaan als volgt te werk:



Figuur 5-6 Oppervlakte-berekening met integraalrekening

We introduceren hier de volgende, veel gebruikte termen:

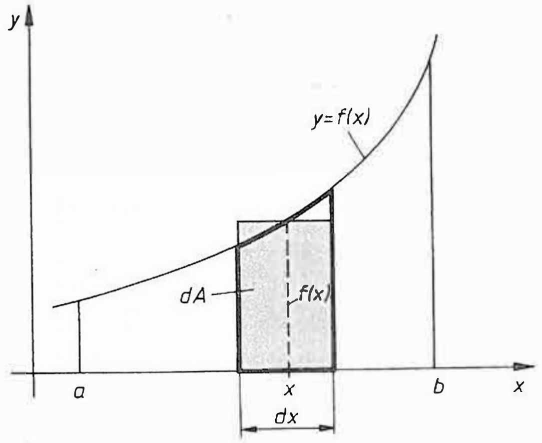
- x: *integratievariabele*
- $f(x)$: *integrand*
- a: *ondergrens van de integraal*
- b: *bovengrens van de integraal*

Definitie: We noemen de limiet

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k \qquad (5\text{-}22)$$

(mits hij bestaat) de *bepaalde integraal van de functie* $f(x)$ tussen de grenzen $x = a$ en $x = b$; notatie:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$



Figuur 5-7
Meetkundige interpretatie van de bepaalde integraal

4.3 Stamintegralen

In paragraaf 4.1.3 staat een tabel met de *afgeleiden van de elementaire functies*. In die tabel staat in de linkerkolom de functie $f(x)$ en in de rechterkolom de bijbehorende afgeleide $f'(x)$. Volgens de *hoofdstelling van de differentiaal- en integraalrekening* geldt:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C \tag{5-39}$$

Zo geldt bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} &\int \cos x\,dx = \sin x + C \\ &\int e^x\,dx = e^x + C \end{aligned} \tag{5-40}$$

Met andere woorden: de functie in de linkerkolom is een *primitieve functie* (of stamfunctie of een onbepaalde integraal) van de functie in de rechterkolom. Deze integralen noemen we *stamintegralen*. Ze staan in tabel 5-1.

Tabel 5-1 Stamintegralen $\int f(x)dx$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C_1 & |x| < 1 \\ & \text{voor} \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C_2 & |x| > 1 \end{cases}$$

4.4 Het berekenen van een bepaalde integraal

Berekening van een bepaalde integraal $\int_a^b f(x)\,dx$

De berekening gaat in twee stappen:

1. Eerst bepalen we een primitieve functie $F(x)$ van de integrand $f(x)$.
2. Met deze primitieve functie berekenen we het *verschil* $F(b) - F(a)$. Dan is:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad (5\text{-}45)$$

Hierin is $[F(x)]_a^b$ de notatie voor het verschil $F(b) - F(a)$.

Opmerking

Het probleem bij de berekening van een *bepaalde* integraal is het bepalen van een *primitieve functie* van de integrand. Als dit lukt, is de integraal gemakkelijk te berekenen. Vaak lukt dit echter niet. We moeten dan andere methoden toepassen (bijvoorbeeld numerieke integratiemethoden).

- **Voorbeelden**

(1) $\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5)\,dx = ?$

We vinden een *primitieve* functie $F(x)$ met de *machtregel* $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (we stellen: $C = 0$):

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x$$

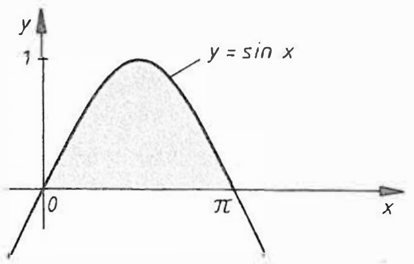
De integraal is volgens formule (5-45) gelijk aan:

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x\right]_1^2 =$$

$$= \left(4 - \frac{16}{3} + 10\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 5\right) = \frac{26}{3} - \frac{55}{12} = \frac{49}{12}$$

(2) We kunnen de *oppervlakte van het vlak* onder de sinuskromme $y = \sin x$ in de *eerste halve periode* berekenen met de bepaalde integraal $A = \int_0^\pi \sin x\,dx$ (zie figuur 5-16). Een *primitieve functie* van de integrand is $F(x) = -\cos x$ ($F'(x) = \sin x = f(x)$). Dus:

$$A = \int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$$



Figuur 5-16
Het berekenen van de oppervlakte van het vlak onder de sinuskromme in het interval $[0, \pi]$

4.5 Elementaire integratieregels.

REGEL 1: Factorregel

Een *constante* factor mogen we *voor* het integraalteken zetten:

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad (5\text{-}46)$$

Opmerking

Deze regel geldt ook voor *onbepaalde* integralen.

Voorbeeld

$$\int_0^\pi 4 \cdot \sin x\,dx = 4 \cdot \int_0^\pi \sin x\,dx = 4\,[-\cos x]_0^\pi = 4\,(-\cos \pi + \cos 0) = 8$$

REGEL 2: Somregel

Een *eindige* som van functies mogen we *term voor term* integreren:

$$\int_a^b (f_1(x) + \ldots + f_n(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx \qquad (5\text{-}47)$$

Opmerking

De *somregel* geldt ook voor *onbepaalde* integralen.

Voorbeeld

$$\int_0^1 (3 \cdot e^x - 2\,x)\,dx = \int_0^1 3 \cdot e^x\,dx + \int_0^1 -2\,x\,dx = 3 \cdot \int_0^1 e^x\,dx - 2 \cdot \int_0^1 x\,dx =$$

$$= 3\,[e^x]_0^1 - 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 3\,(e-1) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}1548$$

REGEL 3: Als we de integratiegrenzen *verwisselen* verandert het teken vóór de integraal

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (5\text{-}48)$$

Voorbeeld

$$\int_\pi^0 \cos x\,dx = -\int_0^\pi \cos x\,dx = -\,[\sin x]_0^\pi = -\,(\sin \pi - \sin 0) = 0$$

REGEL 4: Als de integratiegrenzen samenvallen is de integraal gelijk aan *nul*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad (5\text{-}49)$$

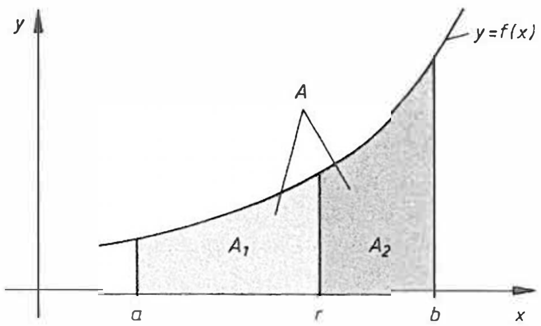
■ **Voorbeeld**

$$\int_1^1 \frac{2}{x}\,dx = 2\cdot\int_1^1 \frac{1}{x}\,dx = 2\,[\ln|x|]_1^1 = 2\,(\ln 1 - \ln 1) = 0$$ ■

REGEL 5: Het opsplitsen van het integratie-interval in twee deelintervallen

Voor ieder punt c in het integratie-interval $a \le x \le b$ geldt (zie figuur 5-19):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (5\text{-}50)$$

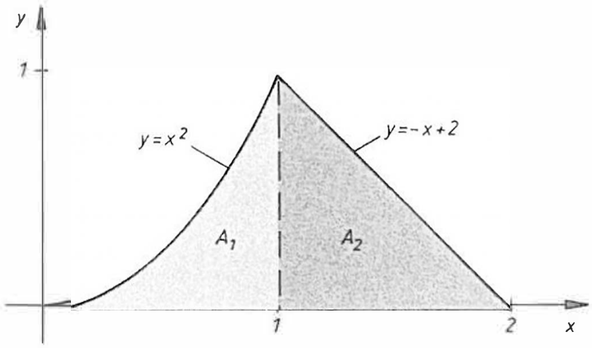


Figuur 5-19
Het opsplitsen van het integratie-interval in twee deelintervallen

■ **Voorbeeld**

De oppervlakte van het vlak in figuur 5-20 wordt berekend als de *som* van twee oppervlakten: $A = A_1 + A_2$.

$$A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (-x+2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$



Figuur 5-20 ■

4.6 Integratiemethoden

De substitutiemethode

We kunnen veel integralen die we in toepassingen tegenkomen door een *substitutie* transformeren in een *eenvoudige integraal* (vaak zelfs in een stamintegraal). We lichten de methode toe aan de hand van een voorbeeld.

De onbepaalde integraal $\int x \cdot \cos(x^2)dx$ is *geen* stamintegraal; we kunnen deze integraal echter door de *substitutie* $u = x^2$ transformeren in een stamintegraal (u is een *hulpvariabele*). We moeten er wel op letten dat ook de 'oude' differentiaal dx in de nieuwe variabele u uitgedrukt wordt. Dit gebeurt door de *substitutievergelijking* te *differentiëren*:

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x, \qquad dx = \frac{du}{2x} \tag{5-51}$$

De *volledige substitutievergelijkingen* zijn dus:

$$u = x^2 \quad \text{en} \qquad dx = \frac{du}{2x} \tag{5-52}$$

Als we deze substituties uitvoeren wordt de onbepaalde integraal $\int x \cdot \cos(x^2)dx$ een stamintegraal:

$$\int x \cdot \cos(x^2)\,dx = \int x \cdot \cos u \, \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \sin u + C \tag{5-53}$$

Na *terugsubstitutie* krijgen we uiteindelijk:

$$\int x \cdot \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C \tag{5-54}$$

Dit is het gezochte antwoord.

De in dit voorbeeld getoonde *oplossingsmethode* bestaat dus uit vier stappen:

Het berekenen van een integraal met de substitutiemethode

1. Het opstellen van de *substitutievergelijkingen*:

$$u = g(x), \quad du = g'(x)dx, \quad dx = \frac{du}{g'(x)} \tag{5-55}$$

of:

$$x = h(u), \quad dx = h'(u)du \tag{5-56}$$

2. Het uitvoeren van de *substituties* in de gegeven integraal $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = \int \varphi(u)du \tag{5-57}$$

In de *nieuwe integraal* staan alleen nog de nieuwe variabele u en de differentiaal du.

3. Het *berekenen* van de *nieuwe* integraal:

$$\int \varphi(u)du = \Phi(u) \tag{5-58}$$

4. *Terugsubstitutie*:

$$\int f(x)dx = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x) \tag{5-59}$$

Tabel 5-2 Substituties in integralen

Type integraal	Substitutie	Oplossing	Voorbeelden	
(A) $\int f(ax+b)\,dx$	$u = ax + b$ $du = a\,dx$ $dx = \dfrac{du}{a}$		1. $\int (2x-3)^6\,dx$ 2. $\int \sqrt{4x+5}\,dx$ 3. $\int e^{4x+2}\,dx$	$(u = 2x - 3)$ $(u = 4x + 5)$ $(u = 4x + 2)$
(B) $\int f(x) \cdot f'(x)\,dx$	$u = f(x)$ $du = f'(x)\,dx$ $dx = \dfrac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2} f^2(x) + C$	1. $\int \sin x \cdot \cos x\,dx$ 2. $\int \dfrac{\ln x}{x}\,dx$	$(u = \sin x)$ $(u = \ln x)$
(C) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$u = f(x)$ $du = f'(x)\,dx$ $dx = \dfrac{du}{f'(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$	1. $\int \dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$ 2. $\int \dfrac{e^x}{e^x+5}\,dx$	$(u = x^2 - 3x + 1)$ $(u = e^x + 5)$
(D) $\int f(x; \sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x = a \cdot \sin u$ $dx = a \cdot \cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \cos u$		1. $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 2. $\int x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 3. $\int \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$	$(x = r \cdot \sin u)$ $(x = r \cdot \sin u)$ $(x = 2 \cdot \sin u)$
(E) $\int f(x; \sqrt{x^2+a^2})\,dx$	$x = a \cdot \sinh u$ $dx = a \cdot \cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2} = a \cdot \cosh u$		1. $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ 2. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$	$(x = \sinh u)$ $(x = 2 \cdot \sinh u)$
(F) $\int f(x; \sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x = a \cdot \cosh u$ $dx = a \cdot \sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2} = a \cdot \sinh u$		1. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ 2. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$	$(x = 3 \cdot \cosh u)$ $(x = 5 \cdot \cosh u)$

4.7 Oefeningen

1) Bepaal *alle* primitieve functies van:

a) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 5$

b) $f(t) = 3 \cdot \sin t - 4 \cdot \cos t$

c) $f(t) = 2 \cdot e^t - \frac{5}{t} + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1 - 2x^2 - 4x^3}{2x} + 3$

e) $f(z) = \dfrac{5}{3 + 3z^2} - \frac{1}{4} z^4$

f) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $f(u) = 3 \cdot \sin u - \frac{6}{u} + 7u^2$

h) $f(x) = -3 \cdot e^x - \cos x$

2) Los de volgende onbepaalde integralen op:

a) $\int (e^x + x^2 - 2x + \sin x)\, dx$

b) $\int \left(10^x - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

c) $\int (2x - 3)^2\, dx$

e) $\int \left(-\dfrac{3}{1 + t^2} - \dfrac{1}{t}\right) dt$

g) $\int \dfrac{5}{\sqrt{u^2 - 1}}\, du$

h) $\int \left(5 \cdot 3^x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

i) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^4}}\, dx$

j) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$

k) $\int \dfrac{\tan x}{\sin(2x)}\, dx$

3) Bereken de volgende bepaalde integralen:

a) $\displaystyle\int_0^4 (x^3 - 5x^2 + 1{,}5\,x - 10)\, dx$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t}$

c) $\displaystyle\int_0^\pi (a \cdot \sin t - b \cdot \cos t)\, dt$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1 - z^2}{z}\, dz$

e) $\displaystyle\int_1^2 5 \cdot \sqrt{x}\, dx$

f) $\displaystyle\int_\pi^2 \cos\varphi\, d\varphi$

g) $\displaystyle\int_0^2 3(1 - e^x)\, dx$

h) $\displaystyle\int_{0{,}5}^5 \frac{4}{t}\, dt$

i) $\displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

k) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1 - u^2}{\sqrt{u}}\, du$

l) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\,(2 - x)\, dx$

4) Hoe groot is de oppervlakte van het vlak dat wordt ingesloten door $y = -0{,}25x^2 + 4$ en de x-as?

5) Bereken de oppervlakte onder de cosinuskromme in het interval $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

6) Bereken de oppervlakte tussen de parabool $y = -3(x-2)^2 + 5$ en de x-as.

7) Los de volgende integralen op (gebruik een *geschikte substitutie*):

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

b) $\int (5x + 12)^{0{,}5}\,dx$

c) $\int \sqrt[3]{1-t}\,dt$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\arctan z}{1+z^2}\,dz$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+6}{x^2+6x-12}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

h) $\int x \cdot \sin(x^2)\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{2x^3-4x+2}\,dx$

j) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(3t - \pi/4)\,dt$

l) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x}\,dx$

m) $\int x^2 \cdot e^{x^3-2}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{\tan(z+5)}{\cos^2(z+5)}\,dz$

o) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$