VOORKENNIS WISKUNDE
Inleidende begrippen

Voor studenten in de Handelswetenschappen

L.Motmans

WOORD VOORAF

In het eerste jaar van de bacheloropleiding Handelswetenschappen is ’Wiskunde voor bedrijfskundigen’ een belangrijk ondersteunend vak. Daarom wordt van de beginnende student een behoorlijke vaardigheid in elementaire rekentechnieken en een basiskennis van de fundamentele wiskundige begrippen verwacht. De cursustekst ’Voorkennis wiskunde, Inleidende begrippen’ wil een hulpmiddel zijn bij het opfrissen van een aantal onderwerpen die werden behandeld in het secundair onderwijs, zonder evenwel diep op de inhoud in te gaan.
Naast het zelfstandig doornemen van deze tekst wordt aan beginnende studenten de mogelijkheid geboden over deze materie vier lesdagen te volgen (september, vóór de start van het academiejaar). Een lesdag is opgesplitst in een uiteenzetting in de voormiddag, gevolgd door een oefeningensessie in kleine groepjes in de namiddag. Vooral studenten die in het verleden een beperkt wiskundepakket hebben gevolgd worden verwacht op deze lessencyclus. Ook anderen, met een grondigere wiskundevorming, zijn welkom indien zij bij het doornemen van de leerstof (en vooral bij het maken van de opdrachten) problemen ondervinden. Goniometrie is geen verplichte leerinhoudelijke doelstelling. Extra aandacht zal besteed worden aan het getal e, de natuurlijke exponentiële functie en de natuurlijke logaritmische functie.

Het gebruik van het grafisch rekentoestel TI - 84 Plus is louter exemplarisch. De student kan blijven werken met het GRT waar hij vertrouwd mee is.

L. Motmans

Mevr. V. Mebis stond in voor het zeer verzorgde tikwerk, waarvoor hartelijk dank.

INHOUD

1 Veeltermen ontbinden in factoren

Een veelterm ontbinden in factoren betekent de veelterm schrijven als een product van veeltermen die een lagere graad hebben dan de gegeven veelterm.
Elke veelterm kan ontbonden worden in factoren van de eerste graad en factoren van de tweede graad met (strikt) negatieve discriminant.
Soms is het wel moeilijk om deze ontbinding te vinden.
We beschrijven enkele werkwijzen.

1.1 Gemeenschappelijke factor(en) afzonderen

Voorbeelden

1) $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$

2) $a(x - y) + 3(y - x) = (x - y)(a - 3)$

3) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

1.2 Merkwaardige producten

In sommige gevallen kan men gebruik maken van één van de volgende formules.

$$\boxed{\begin{array}{l}
(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\
(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \\
(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \\
(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc
\end{array}}$$

Voorbeelden

1) $25x^2 - 36 = (5x-6)(5x+6)$

2) $6a^2 - 24ab + 24b^2 = 6(a^2 - 4ab + 4b^2) = 6(a-2b)^2$

3) $8a^3 - 27b^3 = (2a-3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$

4) $125x^3 + 1 = (5x+1)(25x^2 - 5x + 1)$

5) $x^4 + xy^3 + 3x^3y + 3x^2y^2 = x(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = x(x+y)^3$

6) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

7) $r^3 - 5\sqrt{5} = r^3 - (\sqrt{5})^3 = (r - \sqrt{5})(r^2 + \sqrt{5}r + 5)$

1.3 Ontbinden van $ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

Men berekent de discriminant $\boxed{D = b^2 - 4ac.}$

Als $D < 0$ dan is $ax^2 + bx + c$ onontbindbaar in $\mathbb{R}$.

Als $D \geq 0$ dan is $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ waarbij

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Voorbeelden

1) $3x^2 + 7x + 2$

$D = 49 - 24 = 25$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 5}{6} \begin{array}{l} \nearrow \; -\frac{1}{3} \\ \searrow \; -2 \end{array}$$

$$3x^2 + 7x + 2 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x+2) = (3x+1)(x+2)$$

2) $x^2 + x + 1$ is onontbindbaar in $\mathbb{R}$ want $D = 1 - 4 = -3 < 0$

1.4 Het algoritme van Horner en de reststelling

Dit algoritme kan gebruikt worden voor het delen van een veelterm door een veelterm van de vorm $x - a$, zoals bijvoorbeeld $x - 5$, $x + 2$, $x - \sqrt{2}$, $x - \dfrac{7}{3}$.

Voorbeeld 1

$5x^3 - 7x^2 - 4$ te delen door $x - 2$ (dus $a = 2$)

Schema

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -7 & 0 & -4 \\ 2 & \downarrow & 10 & 6 & 12 \\ \hline & 5 & 3 & 6 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} Q(x) = 5x^2 + 3x + 6 \\ R = 8 \end{array}$$

Werkwijze

- Deeltal rangschikken volgens dalende machten van x. Schrijf de coëfficiënten op in deze volgorde (eventuele nullen niet vergeten).
- Bepaal a.
- Maak de berekeningen zoals aangegeven in het schema.
- Op de laatste regel lezen we : de coëfficiënten van het quotiënt $Q(x)$ en de rest.

Omdat in het algemeen geval, waarbij een veelterm $D(x)$ wordt gedeeld door een veelterm $d(x)$ (met $d(x)$ verschillend van de nulveelterm en met $grd\ D(x) \geq$ graad $d(x)$), geldt dat

$$D(x) = d(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

met $grd\ R(x) < grd\ d(x)$ vinden we nu:

1) $grd\ Q(x) = grd\ D(x) - 1$

2) de rest is een constante.

Voorbeeld 2

$2x^3 - 7x^2y + 7xy^2 - 2y^3$ te delen door $x - 2y$

Schema

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & -7y & 7y^2 & -2y^3 \\
2y & \downarrow & 4y & -6y^2 & 2y^3 \\
\hline
 & 2 & -3y & y^2 & 0
\end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 3xy + y^2$

$R = 0$

Voorbeeld 3

$a^4 + a^2b^2 + b^4$ te delen door $a + b$

Schema

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 0 & b^2 & 0 & b^4 \\
-b & \downarrow & -b & b^2 & -2b^3 & 2b^4 \\
\hline
 & 1 & -b & 2b^2 & -2b^3 & 3b^4
\end{array}$$

$Q(x) = a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3$

$R = 3b^4$

Bij een deling van een veelterm door $x - a$ zijn we soms enkel geïnteresseerd in de rest. In dergelijke gevallen is de reststelling interessant.

Reststelling

De rest bij deling van een veelterm $V(x)$ door $x - a$ is gelijk aan de getalwaarde van die veelterm in a, dus $V(a)$.

Voorbeeld

$V(x) = 5x^3 - 7x^2 - 4$ te delen door $x - 2$
$R = V(2) = 8$

Gevolg

Een veelterm $V(x)$ is **deelbaar** door $x - a$ als en slechts als $V(a) = 0$.

1.5 Een factor van de vorm $x - a$ afzonderen

Als we voor een veelterm $V(x)$ een deler van de vorm $x - a$ hebben gevonden dan is

$$V(x) = (x - a)Q(x)$$

zodat $V(x)$ geschreven is als het product van de veeltermen $x - a$ en $Q(x)$, waarbij $Q(x)$ met het algoritme van Horner kan bepaald worden. Probeer nu $Q(x)$ verder te ontbinden.
Om delers van de vorm $x - a$ van een veelterm $V(x)$ op te sporen (met zowel a als alle coëfficiënten van de veelterm $V(x)$ gehele getallen) gaat men als volgt tewerk :

1) Als de constante term in $V(x)$ nul is, dan kunnen we x afzonderen.

2) Schrijf alle gehele delers op van de constante term in $V(x)$. Deze waarden zijn kanshebbers voor a.

3) Controleer met behulp van de reststelling of de rest bij deling door $x - a$ nul is.

Voorbeeld

$V(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

$del(-18) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$

deler $x - 1$?	$V(1) = -16 \neq 0$	$x - 1$ is geen deler
deler $x + 1$?	$V(-1) = -12 \neq 0$	$x + 1$ is geen deler
deler $x - 2$?	$V(2) = 0$	$x - 2$ is een deler

Vandaar : (Horner)

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 4 & -3 & -18 \\ 2 & \downarrow & 2 & 12 & 18 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 6x + 9$

$x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = (x - 2)(x^2 + 6x + 9) = (x - 2)(x + 3)^2$

In het algemeen zal men de werkwijze om $x - a$ af te zonderen blijven herhalen totdat de laatste factor van graad twee is. Het teken van de discriminant geeft dan aan of er nog verder kan ontbonden worden.

1.6 Opdrachten

De inleidende oefeningen 1 en 2 hebben als doel het rekenen met gebroken vormen op te frissen. Soms zal er gebruik gemaakt worden van merkwaardige producten.

1. Vereenvoudig :
   $\dfrac{a-b}{b-a}$; $\dfrac{xy}{x^2-xy}$; $\dfrac{a-b}{(b-a)^2}$; $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$; $\dfrac{a^6-1}{1-a^4}$; $\dfrac{100-4x^2}{25+5x}$

2. Werk uit :

   a) $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2y}{x^2-y^2}$

b) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{x-3}$

c) $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1-a}$

d) $\dfrac{2}{1+a^2} + \dfrac{4}{a^2-1}$

e) $\dfrac{3ax}{2x-a} \cdot \left(\dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{x}\right)$

f) $\dfrac{a^m - b^m}{a^n - b^n} \cdot \dfrac{a^{2n} - b^{2n}}{a^{2m} - b^{2m}}$

g) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right)\left(\dfrac{a^2+b^2}{2ab} - 1\right)$

h) $\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{a^2+ab-ac} \cdot \dfrac{a}{(a+c)^2 - b^2} \cdot \dfrac{(a-b)^2 - c^2}{ab - b^2 - bc}$

i) $(a+b) : \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

j) $\dfrac{a^2x^2 - x^4}{a^3 - x^3} : \dfrac{ax^2 + x^3}{a^2 + ax + x^2}$

k) $\left(a + \dfrac{ab}{a-b}\right) : \left(b + \dfrac{b^2}{a-b}\right)$

l) $\dfrac{a - 2 + \dfrac{3}{a}}{1 + \dfrac{1}{a^2}}$

m) $2a - \dfrac{2a}{1 - \dfrac{3a}{1+3a}}$

n) $\dfrac{1}{\dfrac{a^2+b^2}{2ab} - 1} : \dfrac{1}{\dfrac{a^2+b^2}{2ab} + 1}$

3. Bereken met behulp van merkwaardige producten :

   a) $(2x-4)^3$

   b) $(x+3)^2 - 3(x+2)^3 + 3(x+1)^3 - x^3$

   c) $(1+x+x^2)^2$

4. Bepaal rest en quotiënt met de regel van Horner :

   $(4x^3 - 8 + 3x^4 - 5x) : (x+2)$

   $(x^3 - 7x + 6) : (x-1)$

   $(3a^5 - 7a^3 + 9a^2 - 10a + 20) : (a+2)$

   $(x^7 - 9x^3y^4 + 2xy^6 - 4y^7) : (x - 3y)$

   $(2x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 8x + 6) : (2x-1)$

5. Bepaal p zodat volgende delingen opgaan (zonder de deling uit te voeren) :

   $(px^3 - 2x^2 - 7px - 10) : (x-2)$

   $(2x^3 + (p-1)x^2 - px + 1) : (x+1)$

6. Bepaal a en b zodat volgende delingen opgaan (zonder de deling uit te voeren) :

   $(ax^3 + 2bx^2 - 4x - a) : [(x+1)(x-1)]$

   $(5x^3 + ax^2 - bx + 2) : [(x-1)(x+2)]$

7. Ontbind in factoren :

   a) $x^3 - 4x^2$

   b) $2a(-x-y) - 7(x+y)$

   c) $x^4 + x^3 - x - 1$

   d) $x^2 - (y+2)^2$

   e) $64a^3 - 125b^3$

   f) $x^8 + 8x^4 + 16$

   g) $250a^3 + 300a^2b^2 + 120ab^4 + 16b^6$

h) $2ax - a^2x^2 - 1 + 9a^2$

i) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

j) $4x^2 - 3x - 1$

k) $-x^2 + 5x + 14$

l) $x^3 - 49x - 120$

2 Sommatieteken, faculteit, binomiaalcoëfficiënt

2.1 Het sommatieteken (met één index)

Voorbeeld 1

De som $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ kan op een korte manier genoteerd worden met behulp van het sommatieteken $\sum$ (of sigmateken, de Griekse hoofdletter voor S), namelijk

$$\sum_{i=1}^{5} x_i$$

We maken dus de som van de termen x_i, voor i gaande van 1 tot en met 5.

De sommatie-index i begint te lopen met de waarde die onder het sommatieteken vermeld staat, maakt telkens sprongen met één, en houdt op met de waarde die boven het sommatieteken geschreven staat. In plaats van i mag ook een andere letter gebruikt worden :

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{j=1}^{5} x_j = \sum_{n=1}^{5} x_n = \ldots$$

$$(= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

Voorbeeld 2

$\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ (met $k \in \mathbb{N}_0$)

Voorbeeld 3

$\sum\limits_{i=k_1}^{k_2} x_i = x_{k_1} + x_{k_1+1} + \ldots + x_{k_2}$ (met $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ en $k_1 \leq k_2$)

Het is ook mogelijk dat elke term dient berekend te worden met behulp van de waarde van de sommatie-index (zie voorbeelden 4, 5, 6, 7).

Voorbeeld 4

$$\sum_{i=1}^{5} 2^i = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

Voorbeeld 5

$$\sum_{n=1}^{10} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Voorbeeld 6

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^n n}{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{13}{60}$$

Voorbeeld 7

$$\sum_{n=1}^{5} 3 = \underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{3} + \underset{\substack{\uparrow \\ n=2}}{3} + \underset{\substack{\uparrow \\ n=3}}{3} + \underset{\substack{\uparrow \\ n=4}}{3} + \underset{\substack{\uparrow \\ n=5}}{3} = 5.3 = 15$$

Eigenschappen

Veronderstel dat $n \in \mathbb{N}_0$ en $a, b \in \mathbb{R}$

1) $\sum_{i=1}^{n} a = na$

2) $\sum_{i=1}^{n} ax_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i$

3) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + a) = na + \sum_{i=1}^{n} x_i$

4) $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} y_i$

2.2 De begrippen faculteit en binomiaalcoëfficiënt

Definitie faculteit

(a) Het product van de eerste n van nul verschillende natuurlijke getallen noteert men $n!$ en leest men als "n faculteit".

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n}$$

(b) $\boxed{0! = 1}$ lees "nul faculteit".

Voorbeelden

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Controleer deze resultaten met behulp van een grafisch rekentoestel **(GRT)**.

Eigenschap

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $n! = n \cdot (n-1)!$

Definitie binomiaalcoëfficiënt

Voor $n, p \in \mathbb{N}$ met $n \geq p$ definieert men de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{p}$ (lees "n over p") als volgt :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Voorbeelden

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2} = 10$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!2!} = 1$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = 1$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!3!} = 1$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$$

2.3 Opdrachten

1. Gegeven

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	0	-2	5	9	2	6	6	-3	4

Bereken de getalwaarde :

a) $\sum_{i=1}^{10} x_i$

b) $\sum_{i=5}^{7} x_i$

c) $\sum_{i=3}^{3} x_i$

d) $\sum_{i=1}^{10} 2x_i$

e) $\sum_{i=1}^{4} x_i^2$

f) $\sum_{i=1}^{10} (x_i + 1)$

g) $\sum_{i=2}^{4} x_{i+1}$

2. Bereken de getalwaarde :

   a) $\sum_{n=0}^{2} 3^{2n-1}$

   b) $\sum_{n=1}^{4} (n^2 - 1)$

3. Is de volgende bewering waar ?

   Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$.

   Zo ja : bewijs.

   Zo neen : geef een tegenvoorbeeld.

4. Schrijf voluit :

   a) $\sum_{k=1}^{3} a_k x_k$

   b) $\sum_{j=1}^{n} b$

   c) $\sum_{i=1}^{3} (y_i - a)$

   d) $\sum_{i=1}^{3} y_i - a$

e) $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n}$

f) $\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^{n+1}5^{n-1}}{2}$

5) Bereken :

$4! \ + \ 3!$

$5! \ - \ 4!$

$\frac{10!}{6!}$

$\frac{6! \ 7!}{8!}$

$\frac{1! \ 2! \ 3! \ 4!}{8!}$

$10!$ gebruik een **GRT**

$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ controleer met een **GRT**

$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}$

$\sum_{n=0}^{3} n!$

$\sum_{p=0}^{3} \begin{pmatrix} 3 \\ p \end{pmatrix} 2^{3-p}3^{p}$

6) Vereenvoudig :

$$\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} =$$

$$\frac{2n!}{(2n)!} =$$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n)!} =$$

$$\frac{(2(n+1))!}{(2n)!} =$$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} =$$

$$\frac{(3n+3)!}{(3n)!} =$$

$$\frac{(3n-1)!}{(3n)!} =$$

$$\frac{(n!)^2}{n^2} =$$

3 Vergelijkingen

Een vergelijking is een gelijkheid die slechts geldt voor geschikte waarden van de letters die er in voorkomen. Deze letters noemt men onbekenden. Bekomt men voor een stel waarden van de onbekenden van een vergelijking dezelfde getalwaarde voor beide leden dan heet dit stel getallen een oplossing. Een vergelijking oplossen is al haar oplossingen bepalen.

3.1 Eerstegraadsvergelijkingen (met één onbekende)

Standaardvorm : $ax + b = 0 \qquad (a \neq 0)$
Oplossing : $x = -\dfrac{b}{a}$
In feite vindt men de oplossing door gewoon te rekenen.

Voorbeelden

1) $6x + 296 = 150x - 70x$ (termen met x in 1ste lid)

$6x + 70x - 150x = -296$

$-74x = -296$

$x = \dfrac{-296}{-74} = 4$
Oplossingsverzameling = $\{4\}$.

2) $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{12-x}{2} = \dfrac{5x-36}{4} - 1$ (noemers wegwerken)

$4(x-2) - 6(12-x) = 3(5x-36) - 12$

$4x - 8 - 72 + 6x = 15x - 108 - 12$

$4x + 6x - 15x = -108 - 12 + 8 + 72$

$-5x = -40$
$x = \dfrac{-40}{-5} = 8$
Oplossingsverzameling = $\{8\}$.

Opdracht

Los de vergelijkingen in deze voorbeelden op met behulp van een **GRT**. Gebruik de optie 'Solver'.

Opmerking

Indien een vergelijking geen reële oplossing heeft, dan spreekt men van een **valse vergelijking**. Indien een vergelijking voldaan is voor elke reële waarde van de veranderlijke, dan spreekt men van een **identiteit**.

Voorbeelden

1) $\dfrac{x}{3} + 2 + \dfrac{5x}{12} = \dfrac{3x}{4} + 3$

   $4x + 24 + 5x = 9x + 36$

   $0x = 12$ geen oplossingen (valse vergelijking)

   Oplossingsverzameling $= \phi$.

2) $\dfrac{2x}{3} + 5 = \dfrac{3x}{2} + 3 - \dfrac{5x}{6} + 2$

   $4x + 30 = 9x + 18 - 5x + 12$

   $4x - 9x + 5x = -30 + 18 + 12$

   $0x = 0$ elke x voldoet (identiteit)

   Oplossingsverzameling $= \mathbb{R}$.

Opdrachten

1) Ga na dat in voorbeeld 1 het gebruik van een **GRT** leidt tot de melding: ERR: no sign chng.

2) Los voorbeeld 2 op met een **GRT**. Gebruik eerst de (standaard) startwaarde 0. Merk op dat als oplossing 0 wordt gegeven. Geef nu een andere willekeurige

startwaarde in, bijvoorbeeld 12.345. Nu wordt 12.345 als oplossing voorgesteld. Of bijvoorbeeld de startwaarde π geeft als antwoord π. Inderdaad, uit de manuele berekeningen weten we dat elk reëel getal een oplossing is. Laat je dus niet op het verkeerde been zetten door je **GRT**.

3.2 Tweedegraadsvergelijkingen

Synoniemen voor tweedegraadsvergelijkingen zijn : kwadratische vergelijking en vierkantsvergelijking.

Standaardvorm :	$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$
Oplossingen :	als $D = b^2 - 4ac \geq 0$ dan $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	als $b^2 - 4ac < 0$ dan geen reële oplossing

$D = b^2 - 4ac$ wordt de discriminant genoemd.

Voorbeelden

1) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Dus : $x_1 = 2$; $x_2 = -\dfrac{1}{3}$

Oplossingsverzameling $= \{2, -\dfrac{1}{3}\}$.

2) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}$$

Oplossingsverzameling $= \{\frac{1}{2}\}$.

3) $x^2 + x + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = -3$ dus geen reële oplossing (valse vergelijking)

Oplossingsverzameling $= \phi$.

4) $k^2 + k = 1$ breng in de standaardvorm

$k^2 + k - 1 = 0$

$D = 5$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \\ \searrow \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

Oplossingsverzameling $= \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

5) Los op naar x :

$$2x^2 + xy = -2y^2 - xy - 1$$

Eerst brengen we deze vergelijking in de standaardvorm :

$$\underbrace{2}_{a} x^2 + \underbrace{2y}_{b} x + \underbrace{2y^2 + 1}_{c} = 0$$

$D = 4y^2 - 8(2y^2 + 1) = -12y^2 - 8 < 0$

Oplossingsverzameling $= \phi$.

6) $7x^2 - 1 = 0$ (de gewone werkwijze is nu omweg !)

$x^2 = \frac{1}{7}$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}$ en $x_2 = \frac{-1}{\sqrt{7}}$

Oplossingsverzameling $= \left\{ \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-1}{\sqrt{7}} \right\}$

7) $-5x^2 + 8x = 0$ (zelfde bemerking !)

$x(-5x + 8) = 0$

$x_1 = 0$ en $x_2 = \dfrac{8}{5}$

Oplossingsverzameling $= \left\{0, \dfrac{8}{5}\right\}$.

Opdracht

Los de vergelijkingen in de voorbeelden 1-2-3-4 op met behulp van een **GRT**. Gebruik de optie 'Solver'. Om de tweede oplossing te vinden in de voorbeelden 1 en 4 gebruik je als startwaarde een schatting van het resultaat.

In deze cursus gaan we niet in op het vinden van gepaste startwaarden. Evenmin maken we bij vergelijkingen die moeilijker zijn een studie om vooraf het precieze aantal oplossingen te bepalen.

Opmerking 1

Men kan eenvoudig nagaan dat voor de twee oplossingen x_1 en x_2 van een vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ (met $D \geq 0$) geldt dat

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

en

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Soms (bijvoorbeeld als $a = 1$ en $b, c \in \mathbb{Z}$) kan deze eigenschap handig zijn om een vierkantsvergelijking op te lossen.

Voorbeeld

Los op : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} s = -\dfrac{b}{a} = 3 \\ \\ p = \dfrac{c}{a} = 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \\ x_2 = 2 \end{array}$$

Opmerking 2 (zie ook voorbeeld 6)

Als $k \geq 0$ dan geldt :

$$x^2 = k$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \pm\sqrt{k}$$

3.3 Vergelijkingen herleidbaar tot vierkantsvergelijkingen

a) Vergelijkingen van de vorm $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Om een dergelijke vergelijking op te lossen voert men een hulponbekende $x^n = y$ in zodat de gegeven vergelijking overgaat in een vierkantsvergelijking

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Als nu y een oplossing van deze vergelijking is, dan vindt men x door de n-de machtswortel(s) van y te bepalen.

Voorbeeld

$x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

Substitutie : $x^3 = y$ zodat $y^2 + 7y - 8 = 0$ met als oplossingen $y_1 = 1$ en $y_2 = -8$.

Uit : $x^3 = 1$ en $x^3 = -8$ volgt $x_1 = 1$ en $x_2 = -2$.

Oplossingsverzameling $= \{1, -2\}$.

b) Vergelijkingen van de vorm $a[f(x)]^2 + bf(x) + c = 0$

Voorbeeld

$(2x^2 - x)^2 \ - \ 4(2x^2 - x) \ + \ 3 = 0$

Substitutie : $2x^2 - x = y$ zodat $y^2 - 4y + 3 = 0$ met als oplossingen $y_1 = 1$ en $y_2 = 3$

Uit : $2x^2 - x = 1$ en $2x^2 - x = 3$ volgt $x_1 = 1$; $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ en $x_3 = -1$; $x_4 = \dfrac{3}{2}$

Oplossingsverzameling $= \left\{1, -\dfrac{1}{2}, -1, \dfrac{3}{2}\right\}$

Opdracht

Los de vergelijking in dit voorbeeld op met behulp van een **GRT** (optie 'Solver').

3.4 Vergelijkingen met vierkantswortels

Om een dergelijke vergelijking op te lossen zal men :

1) de voorwaarden opschrijven waaraan x moet voldoen om de uitdrukkingen onder de worteltekens niet negatief te maken;

2) door opeenvolgende afzonderingen en kwadrateringen de vergelijking wortelvrij maken;

3) bij elke kwadratering de voorwaarden opschrijven waaraan x moet voldoen (uitdrukken dat beide leden hetzelfde teken hebben);

4) de eindvergelijking oplossen en alleen die oplossingen behouden die aan alle beperkende voorwaarden voldoen.

Opmerking

Men kan ook tijdens de berekeningen de voorwaarden over het hoofd zien, en achteraf, via invullen in de opgave, nagaan welke gevonden waarden ook echt oplossingen zijn.

Voorbeelden

1) $x + \sqrt{3x+1} = 1$

Bestaansvoorwaarde : $x \geq -\dfrac{1}{3}$

Omvorming : $\sqrt{3x+1} = 1 - x$

Kwadrateringsvoorwaarde : $1 - x \geq 0$ of $x \leq 1$

Kwadratering : $3x + 1 = 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 5x = 0$

Dit geeft : $x_1 = 0$ en $x_2 = 5$ (te verwerpen)

Oplossingsverzameling = $\{0\}$.

2) $\sqrt{2x+1} = 4 - \sqrt{x-3}$

Bestaansvoorwaarde : $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \geq 3$

Omvorming : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$

Geen kwadrateringsvoorwaarde

Kwadratering : $2x + 1 + x - 3 + 2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 16$

$2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 18 - 3x$

Kwadrateringsvoorwaarde : $18 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq 6$

Kwadratering : $4(2x+1)(x-3) = (18-3x)^2$

$x^2 - 88x + 336 = 0$

Dit geeft : $x_1 = 4$ en $x_2 = 84$ (te verwerpen)

Oplossingsverzameling = $\{4\}$.

Opdracht

Los de vergelijking in voorbeeld 2 op met behulp van een **GRT** (optie 'Solver').

Merk op dat de startwaarde, in overeenstemming met de hogervermelde bestaansvoorwaarde, groter of gelijk aan 3 moet zijn. Zoniet verschijnt de melding: ERR: NON REAL ANS. Dit dient geïnterpreteerd te worden als: geen reële oplossing te vinden met deze startwaarde. Fout is denken dat er geen reële oplossingen zijn voor de vergelijking !

3.5 Opdrachten

1. Los op :

   a) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5} = x - 17$

   b) $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{4-x}{3}$

   c) $\dfrac{x}{6} - \dfrac{x-0,5}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{x}{3}\right)$

   d) $\dfrac{x}{2} - 4 + \dfrac{x}{3} = 7 + \dfrac{5x}{6}$

2. Los op :

   a) $(x-3)^2 + (x-1)^2 = 2$

   b) $4x^2 - 12ax + 9(a^2 - b^2) = 0$

   c) $x + \dfrac{1}{x-3} = 5$

   d) $\dfrac{x-a}{2a} = \dfrac{2a}{x-a}$

   e) $(3x-2)^2 - 5(3x-2) - 14 = 0$

f) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

g) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2 + \dfrac{1}{a^2}$

h) $(x^2 + x + 1)^2 = 4(x^2 + x + 1) + 5$

3. Los op :

   a) $\sqrt{x-4} + 3 = \sqrt{x+11}$

   b) $2\sqrt{x} = \sqrt{x-37} + \sqrt{x+39}$

   Controleer de gevonden oplossingen met behulp van een **GRT** (optie ‘Solver’).

4 Stelsels van lineaire vergelijkingen

Lineaire vergelijking : de onbekende(n) komen voor in de eerste graad.

We bespreken vier methodes.

4.1 Substitutiemethode

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ x + 7y = 10 \end{cases} \quad \text{gegeven}$$

de tweede vergelijking lossen we op naar x

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ x = 10 - 7y \end{cases}$$

we substitueren x door $10 - 7y$ in de 1e vergelijking

$$\begin{cases} 3(10 - 7y) - 4y = 5 \\ x = 10 - 7y \end{cases}$$

de eerste vergelijking is een vergelijking in één onbekende !

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 10 - 7y \end{cases}$$

we vervangen y door 1 in de 2e vergelijking.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{oplossing}$$

Oplossingsverzameling $= \{(3, 1)\}$

4.2 Combinatiemethode

Principe : een vergelijking van het stelsel mag vervangen worden door een lineaire combinatie van deze vergelijking en een andere vergelijking.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 & \times 1 \\ x + 7y = 10 & \times(-3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrl} & 3x - 4y & = 5 \\ & -3x - 21y & = -30 \\ \hline + & -25y & = -25 \\ & y & = 1 \end{array}$$

Vervang één der vergelijkingen (liefst de "moeilijkste"!) door $y = 1$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 7y = 10 \end{cases}$$

we vervangen y door 1 in de 2e vergelijking

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{oplossing}$$

Oplossingsverzameling $= \{(3, 1)\}$

4.3 Eliminatiemethode van Gauss

Werkwijze

Gegeven is een stelsel van lineaire vergelijkingen,

$$\text{bijvoorbeeld} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -7 \\ -2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

De gezochte oplossingen zijn geordende drietallen (x_1, x_2, x_3) welke aan de drie vergelijkingen voldoen.

1) Schrijf de uitgebreide matrix op, d.w.z. vorm een matrix met alleen de getallen van het stelsel.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

2) Pas elementaire rij-operaties toe totdat we een trapvorm bekomen.

   Onder een ***elementaire rij-operatie*** verstaan we één van de volgende bewerkingen:

   - het verwisselen van twee rijen;
   - een rij vervangen door een niet-nul veelvoud van zichzelf;
   - bij een rij een veelvoud van een andere rij tellen.

   Een matrix in ***trapvorm*** is een matrix die voldoet aan de volgende voorwaarden:

   - eventuele nulrijen staan onderaan in de matrix;
   - het eerste niet-nulelement van een niet-nulrij ligt links t.o.v. het eerste niet-nulelement der volgende rijen.

   Toegepast op het voorbeeld:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$R_2/R_2 - 2R_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$R_3/R_3 + 2R_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

trapvorm !

Het stelsel is nu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -5 & (1) \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 3 & (2) \\ \qquad\qquad 3x_3 = 9 & (3) \end{cases}$$

3) Pas nu achterwaartse substitutie toe:

Uit (3) volgt: $x_3 = 3$

Uit (2) volgt: $x_2 = -6$

Uit (1) volgt: $x_1 = 4$

We hebben dus precies één oplossing gevonden nl. het geordend drietal $(4, -6, 3)$.
Besluit: oplossingsverzameling $= \{(4, -6, 3)\}$.

In het ***algemeen*** kunnen we, i.v.m. het ***aantal oplossingen*** van een stelsel van lineaire vergelijkingen, drie gevallen onderscheiden.

- Er zijn geen oplossingen. Dit geval treedt op wanneer de trapvorm een rij van de vorm $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & c \end{array}\right)$ met $c \neq 0$ bevat.
- Er is juist één oplossing. Dit geval doet zich voor wanneer het aantal vergelijkingen in het 'stelsel in trapvorm' gelijk is aan het aantal onbekenden.
- Er zijn oneindig veel oplossingen wanneer het aantal vergelijkingen in het 'stelsel in trapvorm' kleiner is dan het aantal onbekenden.

Voorbeelden

1) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$R_2/R_2 + 2R_1$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

trapvorm

Uit de laatste rij volgt dat $0 \cdot x + 0 \cdot y = 2$ dus een vergelijking die nooit voldaan kan zijn.

Besluit: het gegeven stelsel heeft geen oplossingen.

2) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$R_2/R_2 - 3R_1$

$R_3/R_3 - 2R_1$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{array}\right)$$

$R_3/R_3 - R_2$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trapvorm !

Het stelsel is nu te schrijven als

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - 7z = -3 \end{cases}$$

Dit is een stelsel met 3 onbekenden en slechts 2 vergelijkingen. Neem bijvoorbeeld z als nevenonbekende en de veranderlijken x en y als hoofdonbekenden. De nevenonbekende kan vrij worden gekozen. Vervolgens kunnen de andere onbekenden worden berekend in functie van die vrij gekozen veranderlijke.

$$\begin{cases} z = t & \text{met } t \in \mathbb{R} \\ y = 7t - 3 \\ x = -10t + 5 \end{cases}$$

Besluit: oplossingsverzameling $= \{(-10t + 5, 7t - 3, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

4.4 Canonieke trapvorm en GRT

Bij het toepassen van de eliminatiemethode van Gauss is het mogelijk rij-operaties toe te passen tot we de canonieke trapvorm bekomen.
De **canonieke trapvorm** van de uitgebreide matrix is die trapvorm waarbij

- de leider in elke rij gelijk is aan 1 (een leider is het eerste element in een rij van een matrix dat niet nul is);

- boven de leiders zijn alle elementen in dezelfde kolom van die 1 gelijk aan nul.

Toegepast op het voorbeeld:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & -5 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 9 \end{array}\right) \quad \text{(zie hoger)}$$

$R_3/3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & -5 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

$R_1/R_1 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -4 & -8 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

$R_1/R_1 + 4R_3$

$R_2/R_2 - 3R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

Besluit: oplossingsverzameling= $\{(4, -6, 3)\}$.

Aangezien met een **GRT** de canonieke trapvorm van een matrix gemakkelijk kan gevonden worden met de optie 'rijgereduceerde echelonvorm' (rref), biedt dit mogelijkheden voor het oplossen van een stelsel van lineaire vergelijkingen.

Opdracht

Los het stelsel uit de inleiding en de twee stelsels uit de voorbeelden op m.b.v. een **GRT**. Indien nodig, pas achterwaartse substitutie toe.

4.5 Opdrachten

1. Los de volgende stelsels "manueel" op:

a) $\begin{cases} 12x - 7y = -2 \\ 8x + 21y = 50 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 5b - a \\ 3x - 2y = a + 5b \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 3y - 2z = 3 \\ 9y = 8z \\ 3y + 4z = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 14 \end{cases}$

2. Los de volgende stelsels op door gebruik te maken van een **GRT**:

a) $\begin{cases} 4x + 2y + 5z = 21 \\ 3x + 6y + z = 31 \\ x + 8y + 3z = 37 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y + 7z = 82 \\ 6x - 3y + z = 11 \\ x + 2y - 5z = -27 \end{cases}$

5 Enkele basisbegrippen over reële functies van één reële veranderlijke

5.1 Definities en voorbeelden

Definities

Een functie van $E \subset \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is een relatie die aan elk reëel getal x uit E juist één beeld toekent.
Zulk een functionele relatie noemt men een reële functie van één reële veranderlijke (in 't vervolg kortweg : functie).
Notatie : $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
E noemt men het **domein** van f, ook genoteerd *dom* f

$$dom\ f = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

Verder definieert men **het beeld** van f als

$$bld\ f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in E : f(x) = y\}$$

α is een **nulpunt** van $f \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ is een oplossing van de vergelijking $f(x) = 0$.

Voorbeelden

1) $f_1 : [0, 10] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$
$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$
Merk op dat f_1 en f_2 niet dezelfde functies zijn : de beide functies hebben wel hetzelfde voorschrift, maar *dom* $f_1 \neq$ *dom* f_2.
Het grootst mogelijke domein in $\mathbb{R}$ waarvoor het voorschrift "trek de vierkantswortel uit x" zinvol is, is $\mathbb{R}^+$. We spreken af dat, als we het grootst mogelijk domein in $\mathbb{R}$ bedoelen, we gebruik maken van de verkorte notatie : $y = f(x) = \sqrt{x}$.

2) Met de verkorte notatie $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ bedoelen we $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ omdat $\mathbb{R}_0$ het grootst mogelijke domein in $\mathbb{R}$ is.

In deze cursus zullen we enkele belangrijke reële functies van één veranderlijke behandelen zoals constante functies, eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, goniometrische, logaritmische en exponentiële functies.

5.2 De inverse van een functie in $\mathbb{R}$

De inverse van een functie f in $\mathbb{R}$ is een **relatie** f^{-1} in $\mathbb{R}$ die we bekomen door in alle koppels van f de twee elementen onderling te verwisselen.
Bijgevolg geldt dat

$$dom\ f^{-1} = bld\ f$$

en

$$bld\ f^{-1} = dom\ f$$

Voorbeeld

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

De twee getallen in de koppels onderling verwisselen geeft

x	4	1	0	1	4
$f^{-1}(x)$	-2	-1	0	1	2

Berekenen van het nieuwe voorschrift :

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{y} \end{aligned}$$

herletteren nl.

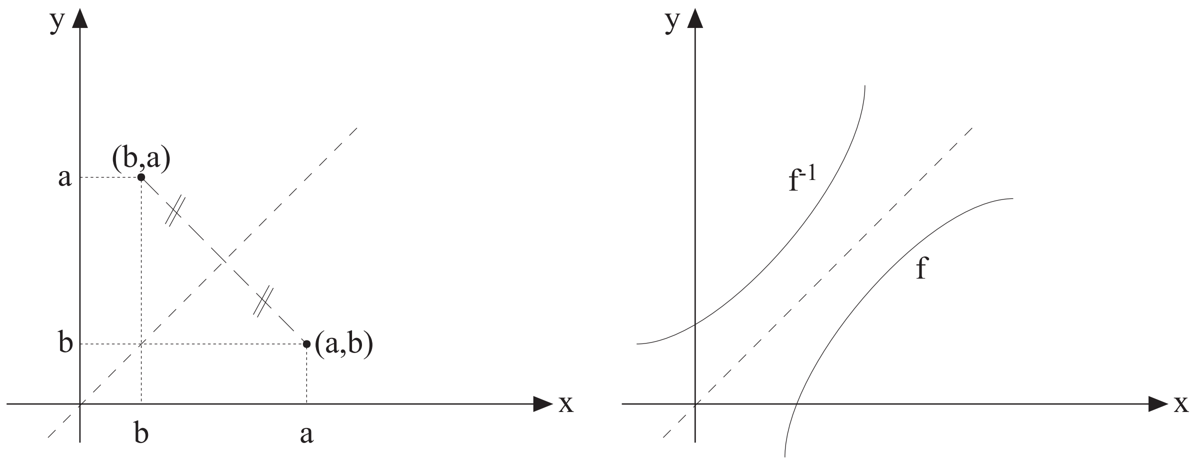
$$y = \pm\sqrt{x}$$

dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \pm\sqrt{x}$

Merk op dat $dom\ f = \mathbb{R} = bld\ f^{-1}$ en $bld\ f = \mathbb{R}^+ = dom\ f^{-1}$

Verband tussen de grafieken van f en f^{-1}

Welnu, $(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$



Vandaar (we werken in een orthonormaal assenstelsel) :

- De grafieken van twee relaties die elkaars inverse zijn, zijn symmetrisch t.o.v. de eerste bissectrice.

In het besproken voorbeeld blijkt dat f^{-1} geen functie is, want bijvoorbeeld

$$4 \mapsto 2$$
$$4 \mapsto -2$$

Het is duidelijk dat

- de inverse relatie f^{-1} van een functie f in $\mathbb{R}$ is een functie

$$ASA$$

f is een bijectie van $dom\ f$ op $bld\ f$.

5.3 Opdrachten

1. Gegeven : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{2x+3}{-x+8}$
   Gevraagd :

   a) *dom* f

   b) nulpunten van f

2. Gegeven : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$
   Gevraagd :

   a) *bld* f

   b) nulpunten van f

3. Gegeven : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 + \sqrt[3]{x}$
   Gevraagd :

   a) f^{-1}

   b) nulpunten van f

   c) nulpunten van f^{-1}

6 Constante functies, eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, homografische functies

6.1 Constante functies

Definitie

Een functie die elk reëel getal afbeeldt op a met $a \in \mathbb{R}$, noemt men een **constante functie**.
Dit betekent dat $y = f(x) = a$ met $a \in \mathbb{R}$.

Voorbeelden

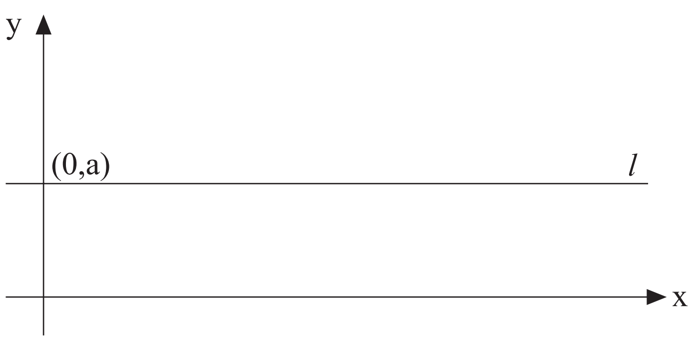
$y = f(x) = 3$
$y = f(x) = -\dfrac{3}{4}$

Eigenschappen

1) Het domein van een constante functie is $\mathbb{R}$.
2) Het beeld van een constante functie is een singleton nl. $bld\ f = \{a\}$.

Grafiek

De grafiek van een constante functie is een rechte evenwijdig met de x-as. De grafiek van $y = f(x) = a$ is de rechte $l : y = a$



Nulpunt(en)

De verzameling der nulpunten van een constante functie is ofwel de lege verzameling ofwel $\mathbb{R}$. Verklaar !

Tekenonderzoek

Bij een constante functie hebben de beelden van alle elementen hetzelfde teken.

Voorbeeld

$y = f(x) = 3$

x	
$f(x)$	$+$

6.2 Eerstegraadsfuncties

Definitie

Een functie die elk reëel getal x afbeeldt op $ax + b$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$ noemt men een **eerstegraadsfunctie** of een lineaire functie.
Dit betekent dat $y = f(x) = ax + b$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$.

Voorbeelden

$y = f(x) = -3x + 6$

$y = f(x) = \sqrt{5}x + \dfrac{1}{2}$

Tegenvoorbeelden

$y = f(x) = 7$

$y = f(x) = x^2 + 2x$

$y = f(x) = \sqrt{x}$

Eigenschappen

1) Het domein van een eerstegraadsfunctie is $\mathbb{R}$.

2) Het beeld van een eerstegraadsfunctie is $\mathbb{R}$.

Verklaar !

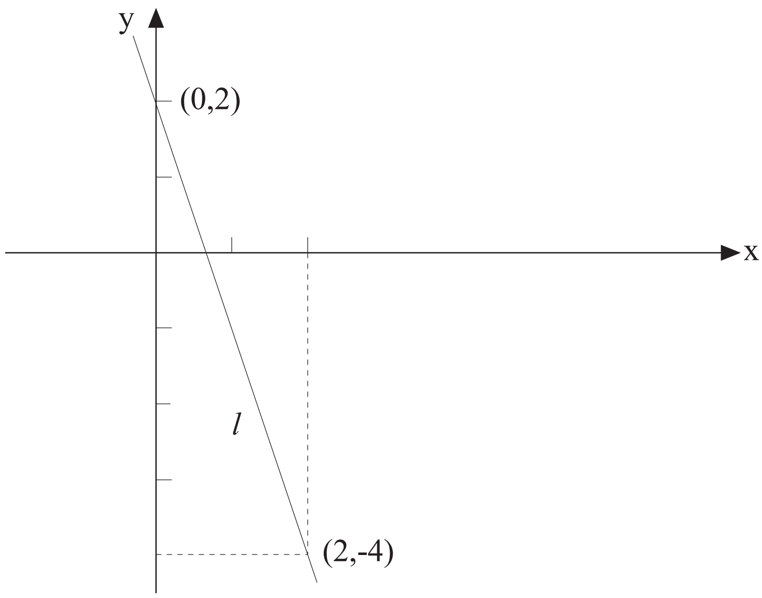
Grafiek

De grafiek van een eerstegraadsfunctie is een rechte die beide assen snijdt.

Voorbeeld

$y = f(x) = -3x + 2$ heeft als grafiek de rechte

$l : y = -3x + 2$



Opmerking

Niet alle rechten zijn grafieken van eerstegraadsfuncties. Inderdaad,

1) De rechte $l : y = 2$ is geen grafiek van een eerstegraadsfunctie maar van de constante functie f met $f(x) = 2$.

2) De rechte $k : x = 3$ is geen grafiek van een eerstegraadsfunctie maar van de relatie $\{(3,0),(3,1),\ldots\}$ die geen functie is.

Besluit : De rechten die evenwijdig zijn met de x-as of de y-as zijn geen grafieken van eerstegraadsfuncties.

Nulpunt(en)

De verzameling der nulpunten van een eerstegraadsfunctie $y = f(x) = ax + b$ is het singleton $\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

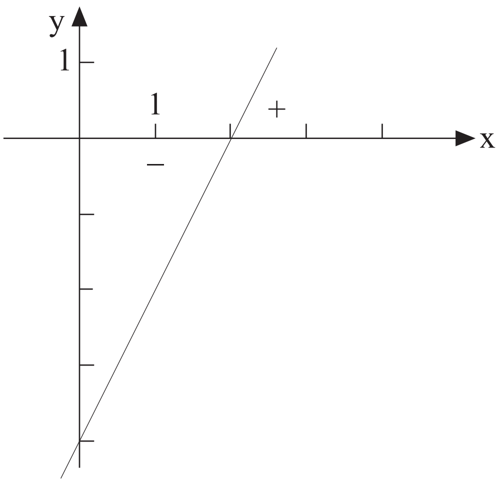
Voorbeeld

$y = f(x) = 3x + 6$

Om het nulpunt te bepalen, moeten we de vergelijking $3x + 6 = 0$ oplossen. Het nulpunt is dus -2.

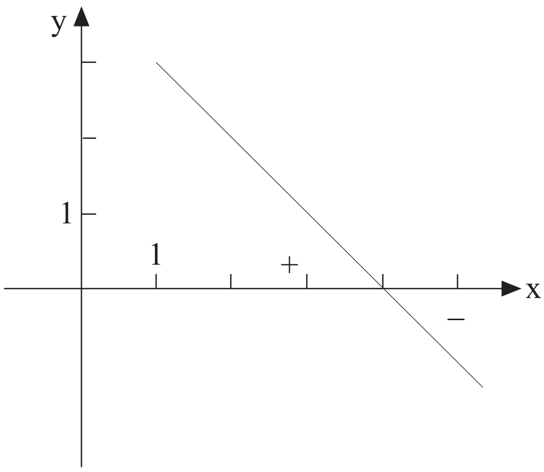
Tekenonderzoek

Voor $y = f(x) = 2x - 4$ onderzoeken we voor welke getallen x geldt : $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.



x		2	
$y = 2x - 4$	$-$	0	$+$

Voor $y = f(x) = -x + 4$ onderzoeken we voor welke getallen x geldt : $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.



x		4	
$y = -x + 4$	$+$	0	$-$

Men kan algemeen bewijzen dat het tekenonderzoek van de 1ste graadsfunctie $y = ax + b$ als volgt verloopt :

x		$-b/a$	
$y = f(x) = ax + b$	tegengesteld teken van a	0	teken van a

In de praktijk is het echter handiger om het teken te bepalen via het invullen van een (gemakkelijke) x-waarde.

Voorbeeld

$y = f(x) = 2x - 4$
nulpunt ? $2x - 4 = 0$ dus $x = 2$

x	2
$y = 2x - 4$	$-$ 0 $+$
	$\uparrow$

neem voor x bijvoorbeeld de waarde 0

het beeld van 0 is -4 dus in dit gebied zijn de beelden negatief.

Opdracht

Gebruik een **GRT** om de grafiek van de functie $f(x) = 2x - 4$ te plotten in het interval $[-1, 3]$. Kies voor 0: ZoomFit. Volg met 'trace' de grafiek en bereken met 'calc' het nulpunt.

6.3 Tweedegraadsfuncties

Definitie

Een functie die elk reëel getal x afbeeldt op $ax^2 + bx + c$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$ noemt men een **tweedegraadsfunctie** of een kwadratische functie. Dit betekent dat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$.

Voorbeelden

$y = f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

$y = f(x) = 3x^2 + 7$

$y = f(x) = -2x^2$

Eigenschap

Het domein van een tweedegraadsfunctie is $\mathbb{R}$.

Grafiek

De grafiek van de tweedegraadsfunctie $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool waarbij de rechte $s : x = \dfrac{-b}{2a}$ **de symmetrie-as** is.
Het snijpunt van de symmetrie-as met de parabool noemt men de **top** van de parabool. De coördinaten van de top zijn dus $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$.

Voorbeelden

We tekenen de grafiek van

$y = f(x) = x^2 + 4x + 3$

$s : x = -2$

Enkele koppels van f :

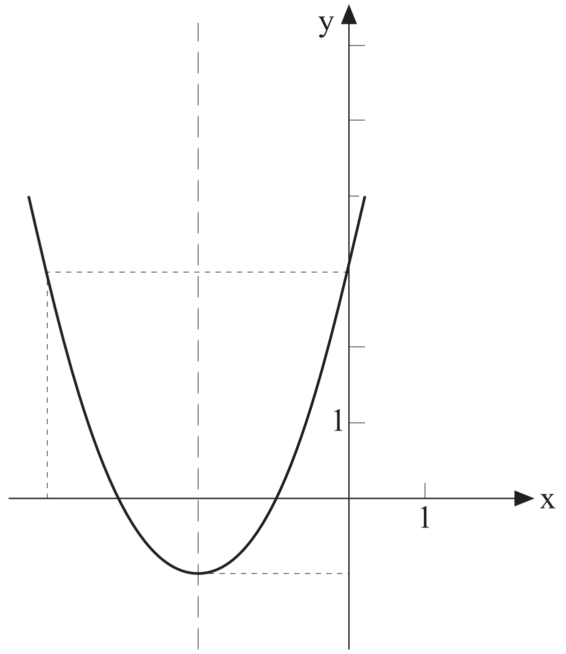
x	-4	-3	-2	-1	0
$y = x^2 + 4x + 3$	3	0	-1	0	3

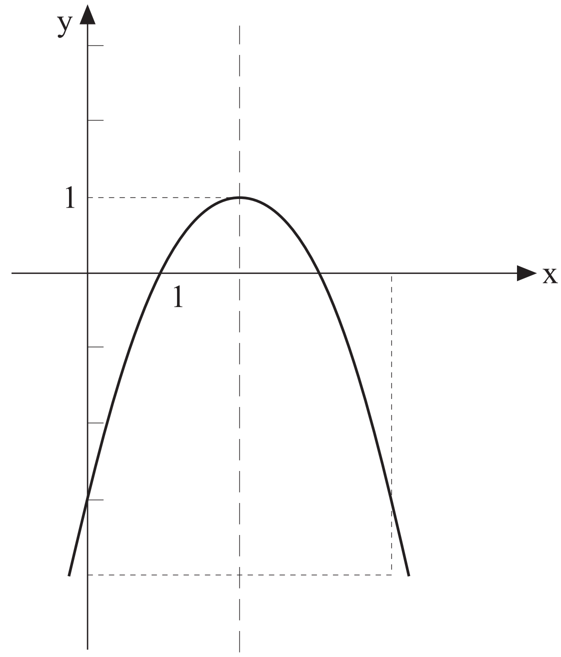
$y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$

$s : x = +2$

Enkele koppels van f :

x	0	1	2	3	4
$y = -x^2 + 4x - 3$	-3	0	1	0	-3





De top van de parabool is $(-2, -1)$

We merken op dat

$a > 0 \Rightarrow$ de functie bereikt een minimum

De top van de parabool is $(2, 1)$

$a < 0 \Rightarrow$ de functie bereikt een maximum

Nulpunten

Om de nulpunten te bepalen van de functies $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$ lost men de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ op in $\mathbb{R}$.

We weten dat als

1) $D > 0$, de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ twee oplossingen heeft nl.

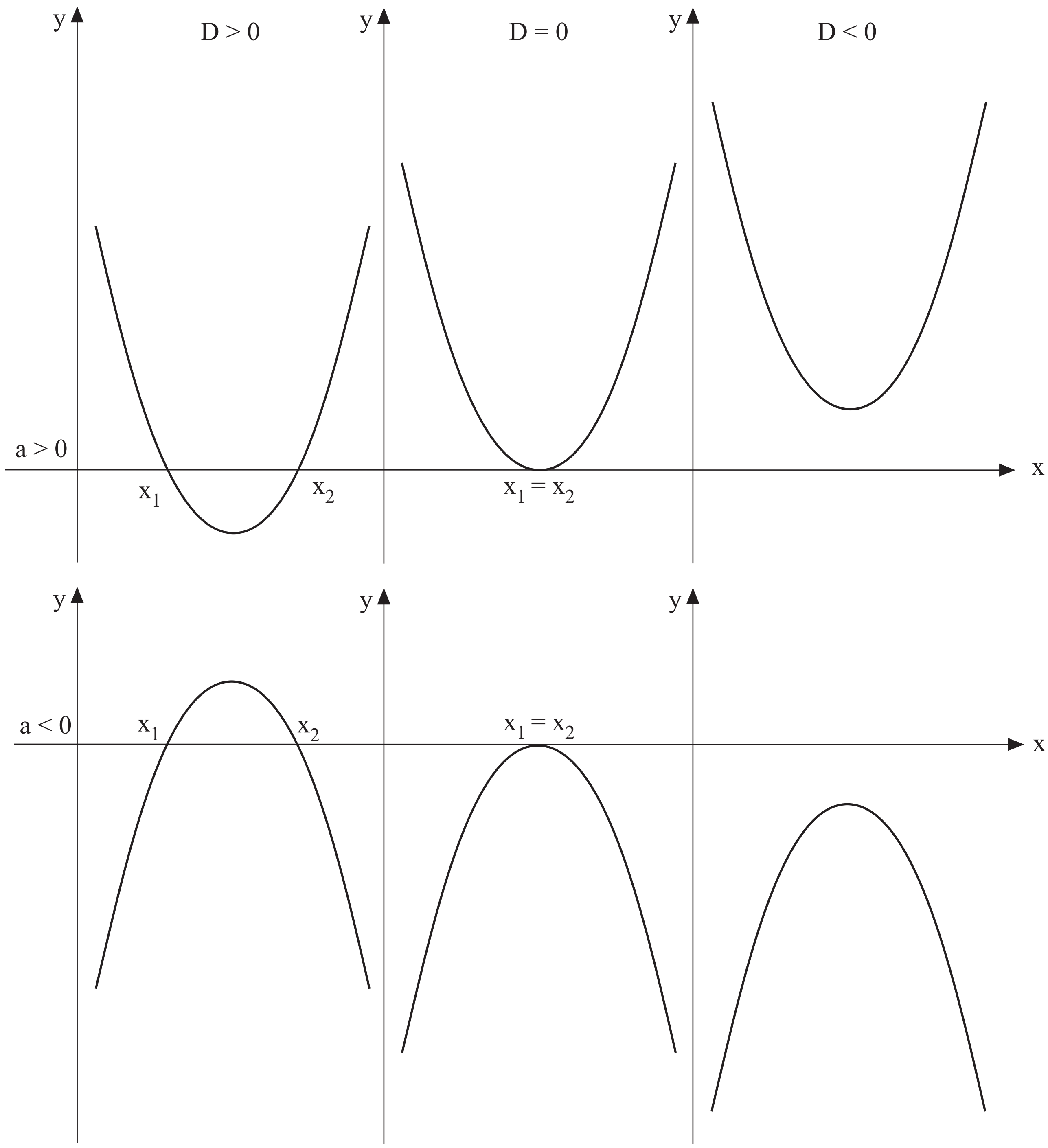
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{en} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

2) $D = 0$ de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ slechts één oplossing (of twee samenvallende oplossingen) heeft nl.

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3) $D < 0$, de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ geen oplossing heeft.

Vandaar de volgende mogelijkheden :



Tekenonderzoek

Voor wat betreft het tekenverloop van een tweedegraadsfunctie leren bovenstaande figuren :

$D > 0$

x		x_1		x_2	
teken van $y = ax^2 + bx + c$	teken van a	0	teken van $-a$	0	teken van a

$D = 0$

x		$x_1 = x_2$	
teken van $y = ax^2 + bx + c$	teken van a	0	teken van a

$D < 0$

x	
teken van $y = ax^2 + bx + c$	y heeft steeds het teken van a

Deze drie gevallen kunnen tot één vuistregel worden teruggebracht :

> $y = ax^2+bx+c$ heeft overal het teken van a, behalve als x tussen de (eventuele) nulpunten ligt.

Toegepast op de voorbeelden:

x		-3		-1		x		1		3	
$y = x^2 + 4x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$	$y = -x^2 + 4x - 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Opdracht

Gebruik een **GRT** om de grafiek van $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ te plotten in het interval $[-1, 5]$. Kies voor 0:ZoomFit. Volg met 'trace' de grafiek en bereken met 'calc' de nulpunten en de maximale waarde.

6.4 Homografische functies

Definitie

Een functie die een reëel getal x afbeeldt op $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ met $c \in \mathbb{R}_0$ en $a, b, d \in \mathbb{R}$ en $ad - bc \neq 0$ noemt men een **homografische functie**.
Dit betekent dat $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ met $c \in \mathbb{R}_0$ en $a, b, d \in \mathbb{R}$ en $ad - bc \neq 0$.

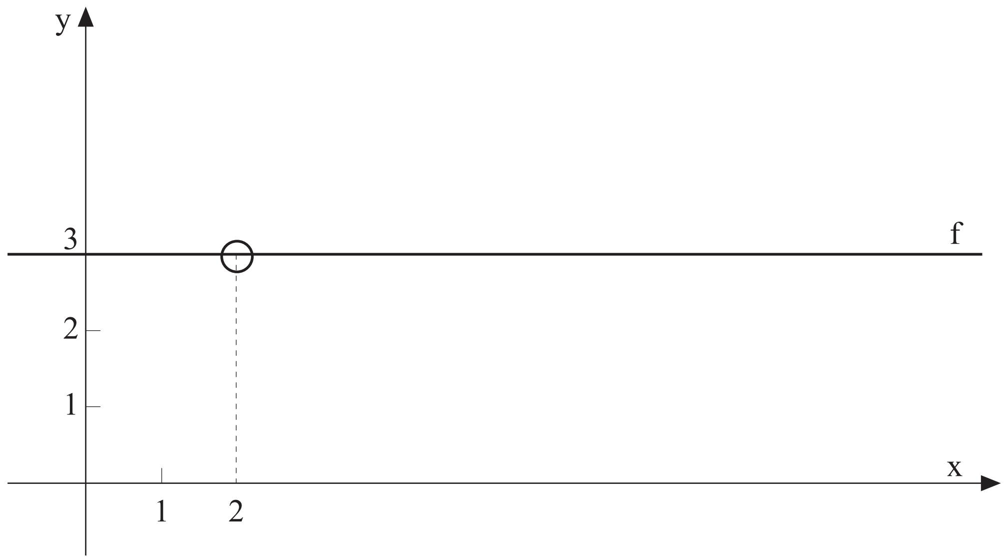
Voorbeelden

$y = f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-7}$ $\qquad$ $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

$y = f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad$ $y = f(x) = \dfrac{-x}{x+\sqrt{2}}$

Tegenvoorbeeld

$y = f(x) = \dfrac{3x-6}{x-2}$ is geen homografische functie want $ad - bc = 3 \cdot (-2) - (-6) \cdot 1 = 0$.
Wat is de grafiek van deze functie ?
$y = f(x) = \dfrac{3(x-2)}{x-2}$ $\qquad$ $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$



Bemerk dat deze grafiek duidelijk afwijkt van de grafieken van de homografische functies (zie verder).

Eigenschap

Het domein van een homografische functie is $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Ga na !

Grafiek

De grafiek van een homografische functie $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ is een hyperbool waarbij de rechte $x = -\dfrac{d}{c}$ een verticale asymptoot (V.A) en de rechte $y = \dfrac{a}{c}$ een horizontale asymptoot (H.A) is (zie hoofdstuk asymptoten).

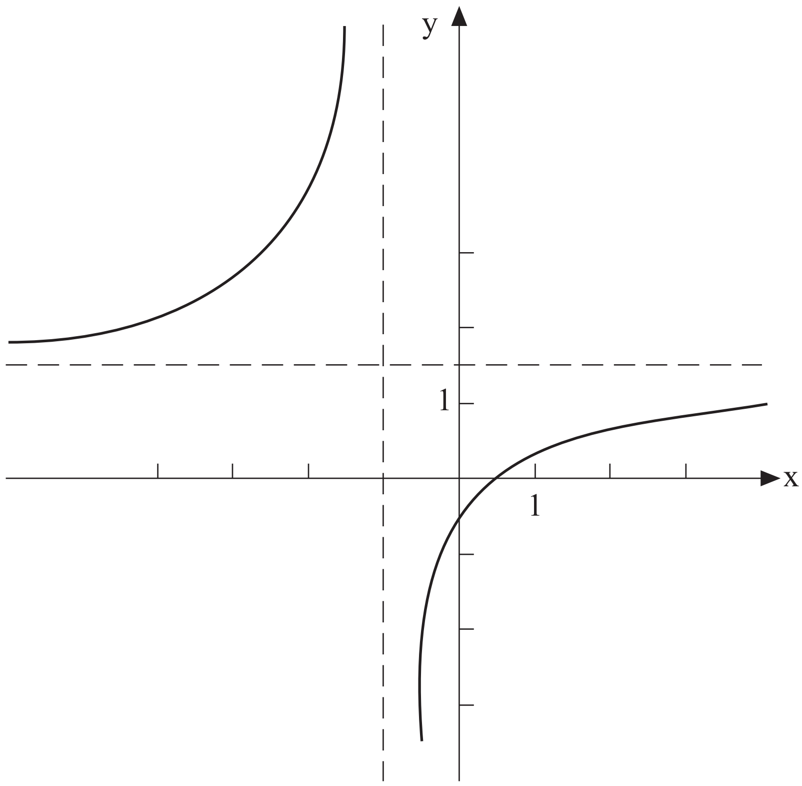
Voorbeeld

We tekenen de grafiek van $y = f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+2}$

$$\begin{aligned} &\text{V.A} : x = -1 \\ &\text{H.A} : y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Enkele koppels van f :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \dfrac{3x-1}{2x+2}$	2	$\dfrac{13}{6}$	$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{7}{2}$	/	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{5}{6}$	1



Opdracht

Gebruik een **GRT** om de grafiek van $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+2}$ te plotten in het kader $[-4, 3] \times [-2, 5]$. Maak dus enkel gebruik van [window] (en niet van [zoom]).

6.5 Opdrachten

1. In welk punt snijdt de rechte gegeven door de vergelijking $y = ax + b$ de x-as.

   a) $y = -3x + 1$

   b) $y = 3x$

   c) $y = 1$

2. Zoek het snijpunt van de twee rechten waarvan de vergelijkingen gegeven zijn.

   a) $y = 3x - 1$
      $y = 1 - x$

   b) $y = 2x$
      $y = 1 - x$

   c) $y = -x$
      $y = 2$

3. Maak het tekenonderzoek

   a) $y = -5x + 7$

   b) $y = x$

   c) $y = mx + n \qquad (m, n \in \mathbb{R}_0)$

4. a) De functie $y = f(x) = -x^2 + px - 5$ heeft een maximum voor $x = 1$. Bereken p en de maximale functiewaarde.

   b) De functie $y = f(x) = px^2 + 4x + p$ heeft een maximum. De maximale functiewaarde is 3. Bereken p.

5. a) Maak de grafieken van de functies $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ en $y = g(x) = 3x - 1$. Gebruik een **GRT**.

b) Volg met 'trace' één van de grafieken en bereken met 'calc' de snijpunten van de rechte en de parabool. Bereken de snijpunten ook manueel.

6. Zelfde vraag als 5. met $y = f(x) = 2x^2 - 1$ en $y = g(x) = 2x$.

7. In welke punten snijdt de parabool, gegeven door de kwadratische functie $y = f(x)$, de x-as.

   a) $y = f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

   b) $y = f(x) = x^2 + 3x - 1$

   c) $y = f(x) = x^2 + 4x$

   d) $y = f(x) = -x^2 - 1$

   e) $y = f(x) = 4x^2$

   f) $y = f(x) = 2x^2 - 6x + \dfrac{9}{2}$

8. Maak het tekenonderzoek.

   a) $y = f(x) = 1 - 3x + x^2$

   b) $y = f(t) = 1 - 2t^2$

   c) $y = f(x) = x^2 + 3x + 6$

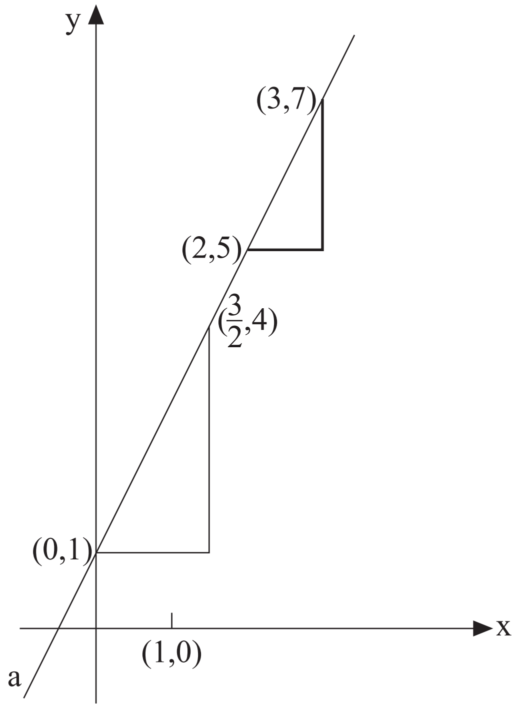
   d) $p = f(q) = 9q^2 + 6q + 1$

9. Teken de grafiek van de functies $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $y = g(x) = x$. Bereken de snijpunten van de hyperbool $y = \dfrac{1}{x}$ en de rechte $y = x$.

10. Zelfde vraag als 9. met $y = f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ en $y = g(x) = 3x - 1$.

7 Richtingscoëfficiënt (helling) van een rechte

7.1 Voorbeeld

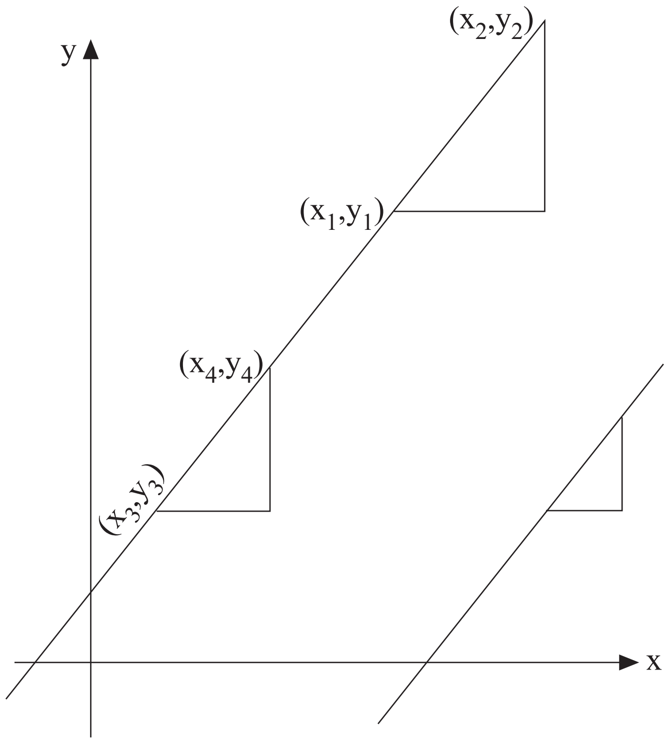


Voor de rechte a geldt dat de verhouding

$$\frac{\text{verticale verandering}}{\text{horizontale verandering}}$$

constant is.
Zo is bijvoorbeeld $\dfrac{7-5}{3-2} = \dfrac{4-1}{\frac{3}{2}-0} \qquad (= 2)$.
We zeggen dat 2 de **richtingscoëfficiënt** van de rechte a is.

7.2 Algemeen



Voor de twee (verschillende) punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) op een rechte a (niet evenwijdig met de y-as) geldt dat

(1) de verhouding $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dezelfde waarde aanneemt voor alle mogelijke puntenparen op de rechte a;

(2) de verhouding $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dezelfde waarde aanneemt voor alle mogelijke puntenparen op een rechte evenwijdig met a.

Deze verhouding $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, die dus enkel afhankelijk is van de "steilte" van de rechte a, wordt de helling van de rechte a of de **richtingscoëfficiënt van de rechte** a genoemd.

7.3 Gevolgen

1) Elke rechte evenwijdig met de x-as (bv. door de punten $(-2, 4)$ en $(1, 4)$) heeft een richtingscoëfficiënt nul.

2) Wanneer de formule wordt gebruikt voor twee punten gelegen op een rechte evenwijdig met de y-as (bv. $(3, 1)$ en $(3, 5)$), dan komt er een nul in de noemer. Vandaar : een rechte evenwijdig met de y-as heeft geen richtingscoëfficiënt.

3) Als de richtingscoëfficiënt van een rechte positief (resp. negatief) is, dan stijgt (resp. daalt) de rechte. Hoe groter de absolute waarde van de richtingscoëfficiënt, hoe steiler de rechte.

4) Opstellen van de vergelijking van een rechte (niet evenwijdig met de y-as) waarvan een punt (x_1, y_1) en de richtingscoëfficiënt m is gegeven. Welnu, als (x, y) een willekeurig punt is op de gevraagde rechte dan weten we :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Herschrijven geeft $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$

5) Elke rechte niet evenwijdig met de y-as, heeft een vergelijking die kan geschreven worden in de vorm $y = mx + n$ waarbij m de richtingscoëfficiënt is en $(0, n)$ het snijpunt met de y-as.

6) Om de richtingscoëfficiënt van een rechte te bepalen vertrekkende van de vergelijking $ax + by + c = 0$, zal men proberen de vergelijking te herschrijven tot $y = mx + n$. Indien dit mogelijk is, dan is m de richtingscoëfficiënt

van de rechte. Als men hier niet in slaagt, dan betekent dit dat de rechte evenwijdig is met de y-as.

Voorbeelden :

a) $5x + 2y + 1 = 0$

$$\Updownarrow$$

$$y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$m = -\frac{5}{2}$$

b) $-2y + 8 = 0$

$$\Updownarrow$$

$$y = 0 \cdot x + 4$$

$$m = 0$$

$$\downarrow$$

rechte // x-as

c) $7x + 3 = 0$

$$\Updownarrow$$

$$7x + 0y + 3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$0y = -7x - 3$$

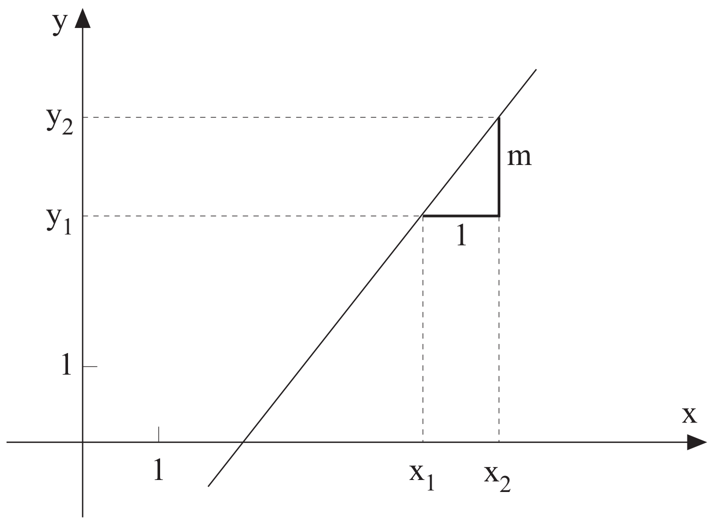
$$\Updownarrow$$

$y = \ldots$ is onmogelijk

De rechte is evenwijdig met de y-as (de vergelijking is $x = \frac{-3}{7}$)

7) Wanneer op een rechte a de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) zó worden gekozen dat $x_2 = x_1 + 1$ dan is de richtingscoëfficiënt

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 + 1 - x_1} = y_2 - y_1$$



m.a.w. : met een horizontale toename van 1 correspondeert een verticale verandering gelijk aan de richtingscoëfficiënt m.

7.4 Opdrachten

1. Stel de vergelijkingen op van de rechten die aan de volgende voorwaarden voldoen.

Eerste reeks (x_1, y_1) behoort tot de rechte				Tweede reeks (x_1, y_1) en (x_2, y_2) behoren tot de rechte			
	rc	(x_1, y_1)	vergelijking		(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	vergelijking
a	-3	$(-2, 1)$		a	$(1, 2)$	$(3, 4)$	
b	2	$(0, 6)$		b	$(-1, 3)$	$(-2, 6)$	
c	0	$(3, 4)$		c	$(5, 6)$	$(3, 0)$	
d	1	$(0, 0)$		d	$(2, 3)$	$(2, 9)$	
e	-2	$(-4, -5)$		e	$(0, 6)$	$(4, 0)$	
d	$\frac{5}{2}$	$(6, -\frac{1}{2})$		f	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$	$(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{6})$	

2. Stel de vergelijking op van de rechte door $(1, 2)$ en $(3, 4)$. Gebruik hiervoor een **GRT**. Verifieer of het resultaat overeenstemt met het antwoord uit de vorige oefening. Plot ook deze rechte in het interval $[-2, 2]$. Kies voor een orthonormaal assenstelsel. (Zoom/ZSquare).

3. Gegeven : $a : y = -4x + 3$
   Stel de vergelijking op van de rechte b als je weet dat $b \parallel a$ en $(1, -4) \in b$.

4. Teken de rechte a (zonder de vergelijking te zoeken) als je weet dat de rechte a de y-as snijdt in $(0, -4)$ en dat de richtingscoëfficiënt 3 is.

5. Zelfde vraag voor de rechte b met snijpunt y-as is $(0, 2)$ en richtingscoëfficiënt is 3.

6. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de volgende rechten.

   a) $x + y - 5 = 0$

   b) $7x = 3$

   c) $-2y + x = 1 + x + y$

8 Veeltermongelijkheden en rationale ongelijkheden in één onbekende

8.1 Algemene werkwijze

Bij het oplossen van een veeltermongelijkheid of een rationale ongelijkheid kan de volgende werkwijze worden gevolgd :

- Maak één lid nul;
- Schrijf het andere lid als een breuk van twee veeltermen;
- Ontbind de teller (respectievelijk de noemer) in factoren van de eerste en de tweede graad;
- Zoek van alle factoren de nulpunten;
- Gebruik nu een tabel om te komen tot het tekenverloop.

Wanneer de opgave eenvoudig is, zijn sommige stappen natuurlijk overbodig.

8.2 Voorbeelden

(1) Los op : $3x - 8 \geq 4$

$3x \geq 4 + 8$

$3x \geq 12$

$x \geq \frac{12}{3}$

$x \geq 4$

Oplossingsverzameling $= \{ x \in I\!R \mid x \geq 4 \}$

(2) Los op : $\frac{3x-5}{2} - \frac{4x-5}{6} < 25$

$3(3x-5) - (4x-5) < 6.25$

$9x - 15 - 4x + 5 < 150$

$5x < 160$

$x < 32$

Oplossingsverzameling $= \{\ x \in I\!R \mid x < 32\ \}$

Bemerk dat we in de voorbeelden (1) en (2) de oplossingsverzameling vinden door gewoon te "rekenen" !

(3) Los op : $(-3x+12)(2x-18) < 0$

We onderzoeken het teken van $(-3x+12)(2x-18)$

De nulpunten zijn 4 en 9.

x		4		9	
$-3x+12$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2x-18$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(-3x+12)(2x-18)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Besluit : Oplossingsverzameling $= \{\ x \in I\!R \mid x < 4\ \vee\ x > 9\ \}$

(4) Los op : $3x^2 - 4x + 1 < 0$

We zoeken de oplossingen van $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$D = 4 > 0;\ \ x_1 = \dfrac{1}{3}$ en $x_2 = 1$

x		$1/3$		1	
$3x^2-4x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Besluit : Oplossingsverzameling $= \{\ x \in I\!R \mid \dfrac{1}{3} < x < 1\ \}$

(5) Los op :

$$\frac{-5x^2+8x-3}{x^2+4x-5} \geq 3$$

$$\frac{-5x^2+8x-3}{x^2+4x-5} - 3 \geq 0$$

$$\frac{-8x^2-4x+12}{x^2+4x-5} \geq 0$$

nulpunten teller : $-\dfrac{3}{2}$ en 1
nulpunten noemer : 1 en -5

x		-5		$-3/2$		1	
$-8x^2-4x+12$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
x^2+4x-5	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{-8x^2-4x+12}{x^2+4x-5}$	$-$	|	$+$	0	$-$	|	$-$

Besluit : Oplossingsverzameling = $\{\ x \in I\!R \mid -5 < x \leq -\dfrac{3}{2}\ \}$

Opdracht

Zoek het teken van $\dfrac{-8x^2-4x+12}{x^2+4x-5}$ voor elke kolom in de tabel door de waarde te zoeken van $\dfrac{-8x^2-4x+12}{x^2+4x-5}$ voor bijvoorbeeld $x=-6$, $x=-3$, $x=-1$, $x=2$. Gebruik een **GRT**. Creëer eventueel een tabel met functiewaarden. Kies voor Indptn:Ask.

8.3 Praktische werkwijze voor het tekenonderzoek van een veelterm of van een breuk van veeltermen

Om snel en vlot te komen tot het tekenverloop van een veelterm

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (\text{met } a_n \neq 0)$$

maken we gebruik van de volgende bedenkingen :

- "nul" voor de nulpunten;

- voor voldoende grote x heeft de veelterm hetzelfde teken als de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm a_n;

- als we x laten veranderen van groot naar klein dan verandert het teken van de veelterm wanneer we voorbij een nulpunt met oneven multipliciteit gaan.

Tekenverloop van een breuk van veeltermen :

- “bestaat niet” voor de x-waarden waarvoor de noemer nul wordt;

- “nul” voor de nulpunten van de teller die geen nulpunten zijn van de noemer;

- wat de plustekens en de mintekens betreft merken we op dat het teken van $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ (een breuk van veeltermen) gelijk is aan het teken van de veelterm $A(x) \cdot B(x)$ zodat de vorige werkwijze kan worden gevolgd.

Voorbeeld

Geef het tekenverloop van $\dfrac{A(x)}{B(x)} = \dfrac{(2-x)^4(x^2+x+1)(3-x)^3(x-1)^4}{(x+7)(2x-1)^5(1-x)}$

x		-7		$1/2$		1		2		3	
$\dfrac{A(x)}{B(x)}$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	0	$-$	0	$\underline{\underline{+}}$

de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm in $A(x) \cdot B(x)$ is 2^5 dus **positief**.

Toemaatje

De beschreven praktische werkwijze geldt natuurlijk ook voor veeltermen van de eerste of tweede graad.

Voorbeelden

x		1	
$x^2 - 2x + 1$	$+$	0	$+$

x		2	
$-4x + 8$	$+$	0	$-$

8.4 Opdrachten

Los de volgende ongelijkheden op :

(1) $\dfrac{x-3}{4} + \dfrac{2x-5}{5} < 1 - 3x$

(2) $(5x-2)(7x-14) > 0$

(3) $-2(x-2)(x+2)(-x+3) \leq 0$

(4) $(x-3)(2x+4) \leq (x-3)(-3x+9)$

(5) $x^2 + 13 \leq 7x + 1$

(6) $(x^2 + 5x + 6)(2x - 1) < 0$

(7) $\dfrac{-x^2 + 3x + 4}{-x + 4} > 0$

(8) $(-x^2 + 2x + 5)(3x^2 + 2x + 5) < 0$

(9) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x+1} > 0$

(10) $(x^3 - 3x^2 - x + 3)(x - 3) > 0$

9 Absolute waarde van een reëel getal

9.1 Definitie en gevolgen

Definitie

Voor $a \in I\!R$ definiëren we de absolute waarde van a (genoteerd door $|a|$) als volgt :

als $a \geq 0$ dan $|a| = a$

als $a < 0$ dan $|a| = -a$

Voorbeelden

$|-3| = 3$; $|5| = 5$; $|\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$; $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

Onmiddellijke gevolgen

(1) De absolute waarde is nooit negatief

$\boxed{|a| \geq 0}$

(2) $\boxed{|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0}$

(3) De absolute waarde van een product is gelijk aan het product van de absolute waarden

$\boxed{|ab| = |a|\ |b|}$

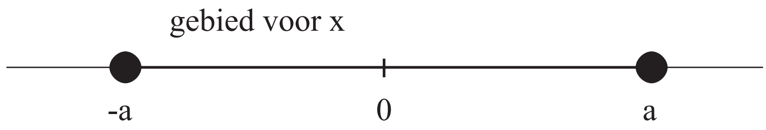
(4) $\boxed{|-a| = |a|}$

(5) De absolute waarde van een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de absolute waarden.

$\boxed{|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}}$

9.2 Eigenschappen

(1) Als $a \geq 0$ dan geldt $\boxed{|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a}$



We merken op dat een x die voldoet aan de ongelijkheid op minder dan een afstand a van 0 gelegen is.

Voorbeeld :

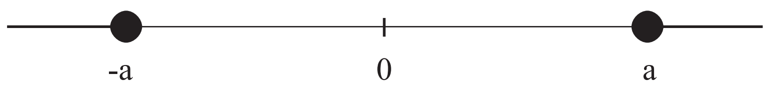
$|2x - 1| \leq 3$

$-3 \leq 2x - 1 \leq 3$

$-2 \leq 2x \leq 4$

$-1 \leq x \leq 2$

(2) Als $a \geq 0$ dan geldt $\boxed{|x| \geq a \;\Leftrightarrow\; x \leq -a \text{ of } x \geq a}$



We merken op dat een x die voldoet aan de ongelijkheid op meer dan een afstand a van 0 gelegen is.

Voorbeeld :

$|3 - x| > 2$

$3 - x < -2$ of $3 - x > 2$

$x > 5$ of $x < 1$

(3) Driehoeksongelijkheid : $\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|}$

Voorbeeld :

$| - 3 + 7| \leq | - 3| + |7|$

4 10

(4) Als $a \geq 0$ dan geldt $\boxed{x^2 \leq a \;\Leftrightarrow\; |x| \leq \sqrt{a}}$

Voorbeeld : $x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -3 \leq x \leq 3$

(5) Als $a \geq 0$ dan geldt $\boxed{x^2 > a \;\Leftrightarrow\; |x| > \sqrt{a}}$

Voorbeeld : $x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x < -2$ of $x > 2$

9.3 Opdrachten

1. Los op (met $x \in I\!R$).

   (1) $|x - 4| < 1$

   (2) $|x + 2| < 5$

   (3) $|x + \frac{1}{2}| \geq \frac{2}{5}$

   (4) $(x - 2)^2 < 9$

   (5) $(3x - 2)^2 \leq 1$

   (6) $|3 - x| > 2$

   (7) $\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1$

   (8) $\frac{1}{2} < (3 - 4x)^2$

2. Maak de grafiek van de functie

   (1) $f(x) = |x|$

   (2) $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$
   (let op: *dom* $f = I\!R_0$)

   Plot, ter controle, de grafieken met een **GRT**.

10 Exponentiële en logaritmische functies

10.1 Machten van een reëel getal

Definities

1) Voor $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$, stelt men

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ maal}}}$$

Voor $a \in \mathbb{R}_0$ stelt men

$$\boxed{a^0 = 1}$$

2) Voor $a \in \mathbb{R}_0$ en $n \in \mathbb{N}$, stelt men

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

3) Als $a, b \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$, dan noemt men b een n-de machtswortel van a als $b^n = a$.

   Voorbeeld :

   2 is de 5-de machtswortel uit 32 omdat $2^5 = 32$

   2 en -2 zijn beide 4-de machtswortels van 16 omdat $2^4 = 16$ en $(-2)^4 = 16$.

   Notatie :

   – Als n oneven is, dan heeft **elk** reëel getal a **juist één** n-de machtswortel, genoteerd door $\sqrt[n]{a}$

   – Als n even is, dan

     - hebben de negatieve getallen geen n-de machtswortel;

- hebben de positieve getallen twee n-de machtswortels die tegengesteld zijn.

  We noteren

  de positieve n-de machtswortel door $\sqrt[n]{a}$

  de negatieve n-de machtswortel door $-\sqrt[n]{a}$

Opmerkingen:

(1) $\sqrt[n]{0} = 0$

(2) Voor de 2-de machtswortel schrijven we $\sqrt{a}$ i.p.v. $\sqrt[2]{a}$.

4) Als $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $m, n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$ dan stelt men

$$\boxed{\begin{array}{l} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \\ \\ a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \end{array}}$$

Voorbeeld : $3^{\frac{7}{2}} = \sqrt{3^7}$; $3^{-\frac{7}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3^7}}$; $10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2}$

5) Het machtsbegrip kan nog verder uitgebreid worden zodat bv. ook $2^{\sqrt{3}}$ en 4^{π} een betekenis krijgen (dit wordt hier niet behandeld).

Eigenschappen

Als $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ en $x, y \in \mathbb{R}$ dan geldt

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$

4) $(ab)^x = a^x b^x$

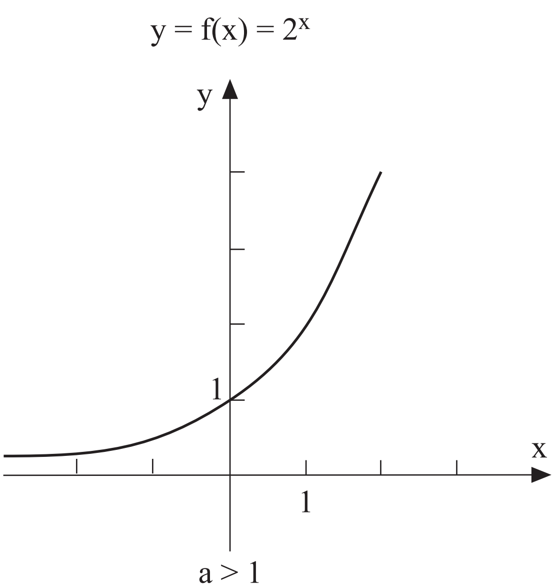
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

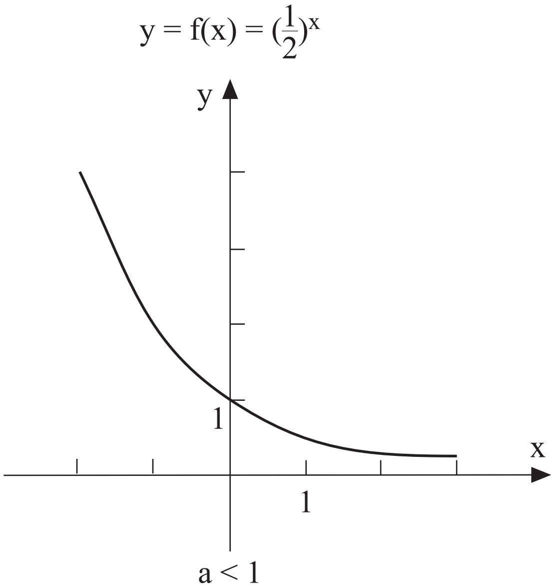
10.2 Exponentiële functies

We noemen exponentiële functie met grondtal a de functie

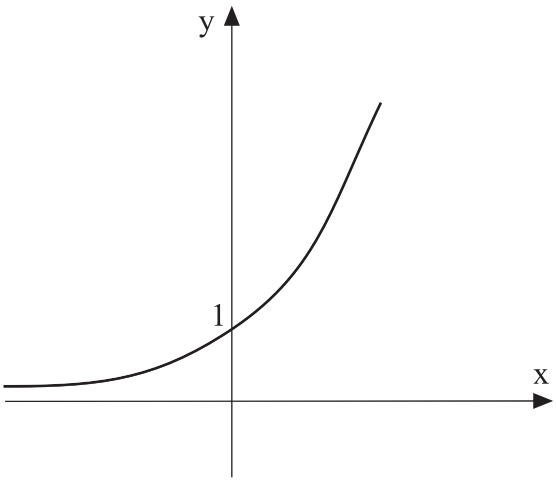
$$f: \begin{array}{l} I\!\!R \to I\!\!R \\ x \mapsto a^x \end{array} \quad \text{met } a \in I\!\!R_0^+ \setminus \{1\}$$

Voorbeelden

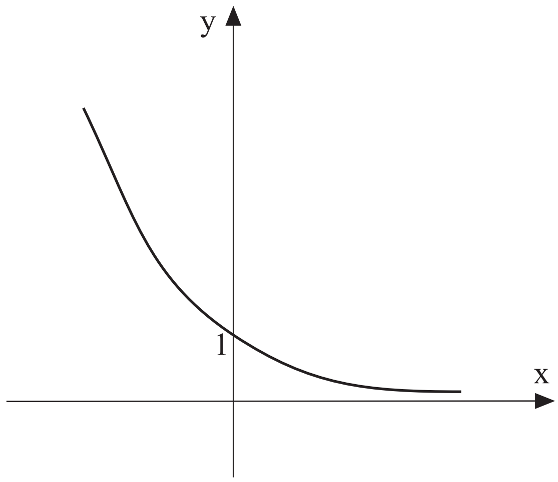




Algemeen



grafiek van $y = a^x$
met $a > 1$



grafiek van $y = a^x$
met $0 < a < 1$

- *dom* $f = \mathbb{R}$
- *bld* $f = \mathbb{R}_0^+$ (dus $a^x > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$)
- grafiek gaat door $(0, 1)$
- als $a > 1$ dan is de functie stijgend
  als $a < 1$ dan is de functie dalend.

Opmerkingen

1) Let op het verschil tussen bijvoorbeeld de exponentiële functie met grondtal 2 nl. $x \mapsto 2^x$ en de kwadratische functie $x \mapsto x^2$ (met als grafiek een parabool).

2) Als we in de definitie a toch gelijk aan 1 nemen d.w.z. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1^x = 1$ dan bekomen we dus de constante functie op 1.

3) Zoals reeds werd vermeld gaan we op de preciese betekenis van bijvoorbeeld $3^{\sqrt{7}}$ en 2^π (de exponenten zijn irrationale getallen) niet in.

10.3 Logaritmen

Definitie

De a-logaritme van een reëel getal x is gelijk aan y a.s.a. we aan a de exponent y moeten geven om x te bekomen.

Of $\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y}$

De a in $\log_a x$ heet het **grondtal** van de logaritme.
Men neemt steeds een grondtal a dat reëel is, strikt positief en verschillend van 1.
Bijgevolg geldt : negatieve getallen en het getal 0 hebben geen logaritme want als $a > 0$ is ook $a^y > 0$.

Voorbeelden

$\log_2 8 = 3$ want $8 = 2^3$

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ want $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ want $\sqrt{3} = (3)^{\frac{1}{2}}$

Eigenschappen

Stel $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, $\qquad r \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a(x^r) = r \log_a x$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Deze laatste formule geeft het verband aan tussen de logaritmen van eenzelfde reëel getal x t.o.v. twee verschillende grondtallen.

Opmerkingen

(1) Voor de 10-logaritme van x schrijven we $\log x$ i.p.v. $\log_{10} x$.

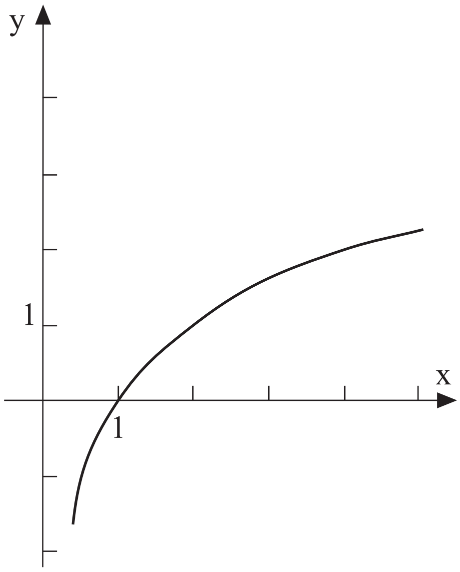
(2) Voor praktische berekeningen zal men veelal gebruik maken van een rekentoestel en de formule $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ of $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ (zie verder).

10.4 Logaritmische functies

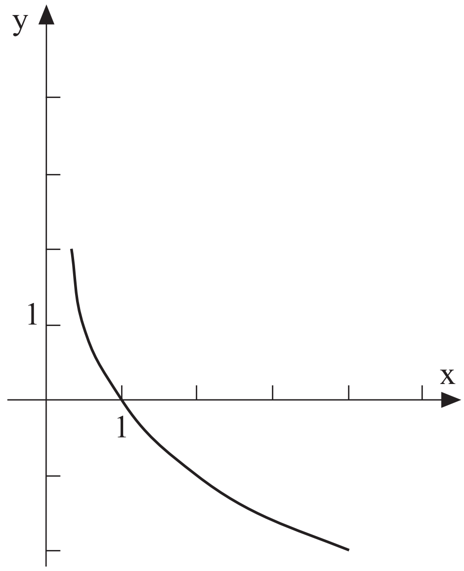
De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x$ met $a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$ noemen we de logaritmische functie met grondtal a.

Voorbeelden

$y = f(x) = \log_2 x$ $\qquad\qquad$ $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

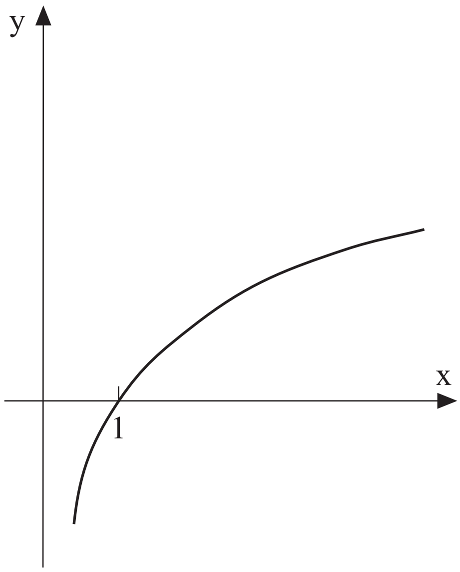


$a > 1$

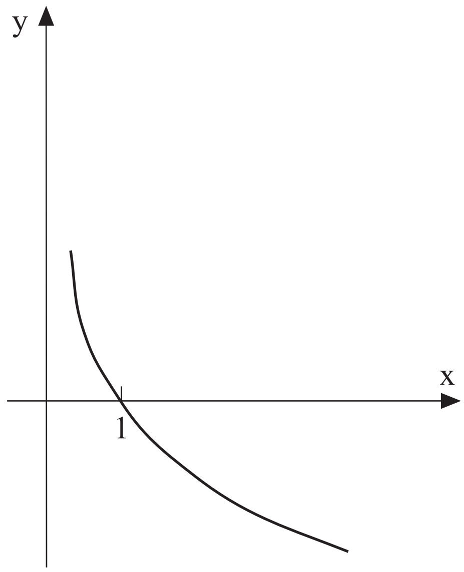


$a < 1$

Algemeen



grafiek van $y = \log_a x$
met $a > 1$



grafiek van $y = \log_a x$
met $a < 1$

- $dom\ f = \mathbb{R}_0^+$

- $bld\ f = \mathbb{R}$

- grafiek gaat door $(1, 0)$

- als $a > 1$ dan is de functie stijgend
  als $a < 1$ dan is de functie dalend.

- De logaritmische functie met grondtal a is de inverse functie van de exponentiële functie met grondtal a. Dit wordt verduidelijkt door volgende tabellen (neem $a = 2$) :

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

  De grafiek van $y = \log_2 x$ is dan ook het spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice van de grafiek van $y = 2^x$.

10.5 Exponentiële vergelijkingen

Een exponentiële vergelijking in $\mathbb{R}$ is een vergelijking in $\mathbb{R}$ waarbij de onbekende in de exponent voorkomt. We beschrijven aan de hand van voorbeelden drie methodes om een dergelijke vergelijking op te lossen.

1. *Door overgang op logaritmen*

Voorbeeld 1

$7^x = 9$

$x \log 7 = \log 9$

$x = \dfrac{\log 9}{\log 7} \approx 1,129$

Voorbeeld 2

$5^{x-1} = 2^{x-3}$

$\log 5^{x-1} = \log 2^{x-3}$

$(x-1)\log 5 = (x-3)\log 2$

$x(\log 5 - \log 2) = \log 5 - 3\log 2$

$x = \dfrac{\log 5 - \log 2^3}{\log 5 - \log 2}$

$x \approx -0,513$

2. *Beide leden schrijven als machten van eenzelfde constant grondtal*

Voorbeeld 1

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

Voorbeeld 2

$2^{x+1} = 2^{-x}$

$x + 1 = -x$

$2x = -1$

$x = -\dfrac{1}{2}$

Voorbeeld 3

$8^{x-1} = 4$

$(2^3)^{x-1} = 2^2$

$2^{3x-3} = 2^2$ waaruit $3x - 3 = 2$ of $x = \dfrac{5}{3}$

3. *Invoering van een nieuwe onbekende (substitutie)*

Voorbeeld

$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$

$2^3 \cdot 2^x + 4 \cdot 4^x - 320 = 0$ of $4 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 320 = 0$

Stel : $2^x = y$

Zo ontstaat de vierkantsvergelijking

$4y^2 + 8y - 320 = 0$ of $y^2 + 2y - 80 = 0$

met als oplossingen : $y = 8$ en $y = -10$

Dit geeft nog op te lossen :

$2^x = 8$ en $2^x = -10$

$2^x = 2^3$ Valse vergelijking

$x = 3$

10.6 Logaritmische vergelijkingen

Een logaritmische vergelijking in $\mathbb{R}$ is een vergelijking in $\mathbb{R}$ waarbij de onbekende achter een logaritme-teken of in het grondtal van de logaritme voorkomt.

Voorbeeld

$\log_2 x \cdot \log_x 6 = \log_2 x + \log_2(7 - x^2)$

Bestaansvoorwaarden :

$$\begin{cases} x \in I\!R_0^+ \\ x \in I\!R_0^+ \setminus \{1\} \\ 7 - x^2 > 0 \end{cases}$$

Samengevatte bestaansvoorwaarde : $x \in \,]0, \sqrt{7}[\, \setminus \{1\}$.

Oplossing van de vergelijking (formules gebruiken)

$\log_2 x \cdot \log_x 6 = \log_2 x + \log_2(7 - x^2)$

$\log_2 x \cdot \dfrac{\log_2 6}{\log_2 x} = \log_2 x + \log_2(7 - x^2)$

$\log_2 6 = \log_2(x(7 - x^2))$

$6 = x(7 - x^2)$

$x^3 - 7x + 6 = 0$

$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$

$x = 1$ te verwerpen

$x = 2$

$x = -3$ te verwerpen

10.7 Opdrachten

1. Vereenvoudig ($a, b, c \in I\!R_0^+$)

$(-8)^{\frac{2}{3}}$ $\qquad (-8)^{-\frac{2}{3}}$ $\qquad \sqrt[3]{-96}$ $\qquad -8^{\circ}$

$(5.2^{-2})^{-3}$ $\qquad \dfrac{-(-2)^4}{(-2.3^2)^{-1}}$ $\qquad \sqrt[5]{-256a^{-35}c^{15}}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ $\qquad \sqrt[3]{\sqrt[n]{a^{6n+1}b}}$ $\qquad \left(ab^3c^{-\frac{7}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} \left(ab^{\frac{7}{2}}\right)^{-1}$.

2. Bereken (zonder gebruik te maken van een rekentoestel)

(1) $\log_2 32$ (7) $\log_3 \dfrac{1}{\sqrt[5]{27}}$ (13) $\log_4 8\sqrt{2}$

(2) $\log_2 \dfrac{1}{64}$ (8) $\log_5 5$ (14) $\log_7 \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

(3) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (9) $\log_{\frac{1}{2}} 64$ (15) $\log_{\sqrt{3}} 81$

(4) $\log_4 2$ (10) $\log 0,1$ (16) $\log_\pi \pi$

(5) $\log_4 8$ (11) $\log \sqrt[3]{100}$ (17) $\log_{0,5} 0,25$

(6) $\log_4 \sqrt[3]{4}$ (12) $\log_9 \dfrac{1}{3}$ (18) $\log_{\sqrt{7}} 7$

3. Bereken x, als

(1) $\log_5 x = -1$ (3) $\log_2 x = \dfrac{3}{2}$ (5) $\log_x 4 = 2$

(2) $\log_x \sqrt{2} = 2$ (4) $\log x = -3$ (6) $\log_x \dfrac{1}{3} = 2$

4. Maak de oefeningen uit opgave 3. opnieuw, maar gebruik nu een **GRT** (optie 'Solver').

Hint:

$\log_5 x = -1$ verander van grondtal

$$\frac{\log x}{\log 5} = -1$$

$$1 + \frac{\log x}{\log 5} = 0$$

neem een strikt positieve startwaarde, bijvoorbeeld 1.

Hint: denk per oefening na over een geschikte startwaarde, rekening houdend met de bestaansvoorwaarden.

5. Los op naar x, eerst manueel, vervolgens m.b.v. een **GRT** (optie 'Solver').

   (1) $27^{\frac{1}{x}} \cdot 243^{\frac{1}{x+2}} = 81^{\frac{1}{x-1}}$

   (2) $0,86^x = 0,0719$

   (3) $16^x - 7.4^x = 8$

   (4) $5^{x+1} + 2 \cdot 5^{-x} = 7$

   (5) $\log_x 4 = \log_4 x$

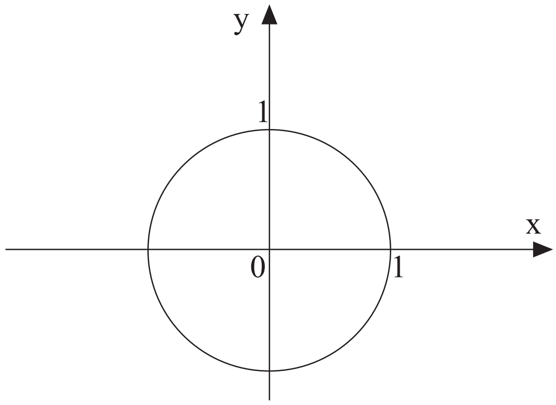
   (6) $\log_2(\log_x 81) = 2$

6. Maak de grafiek van $y = f(x) = 3^{-x}$.

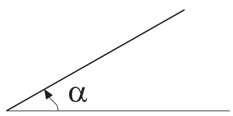
11 De voornaamste begrippen uit de goniometrie

11.1 Inleiding

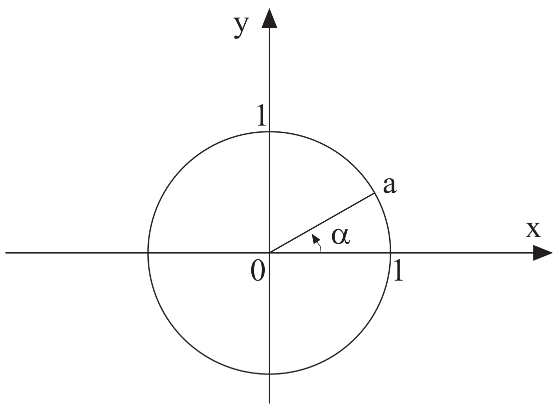
Teken in het vlak, voorzien van een orthonormaal assenstelsel, een cirkel met straal 1 en met de oorsprong als middelpunt.



Indien we naar deze cirkel willen verwijzen, zullen we spreken van de goniometrische cirkel. Zij nu α een georiënteerde hoek :



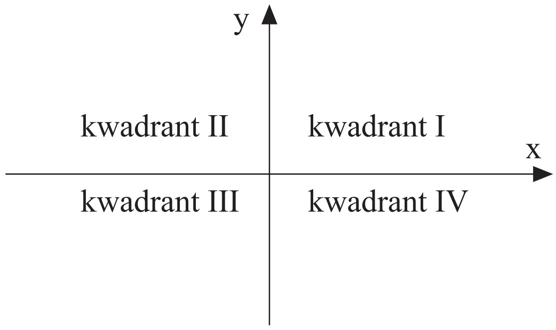
We plaatsen de georiënteerde hoek α in het vlak, zodanig dat het hoekpunt samenvalt met de oorsprong en de eerste halfrechte samenvalt met de positieve x-as :



De georiënteerde hoek α wordt nu ondubbelzinnig voorgesteld door het punt a.

Afspraak : in 't vervolg bedoelen we met "hoek" steeds "georiënteerde hoek".

Bemerk dat de assen de goniometrische cirkel in vier kwadranten verdelen :

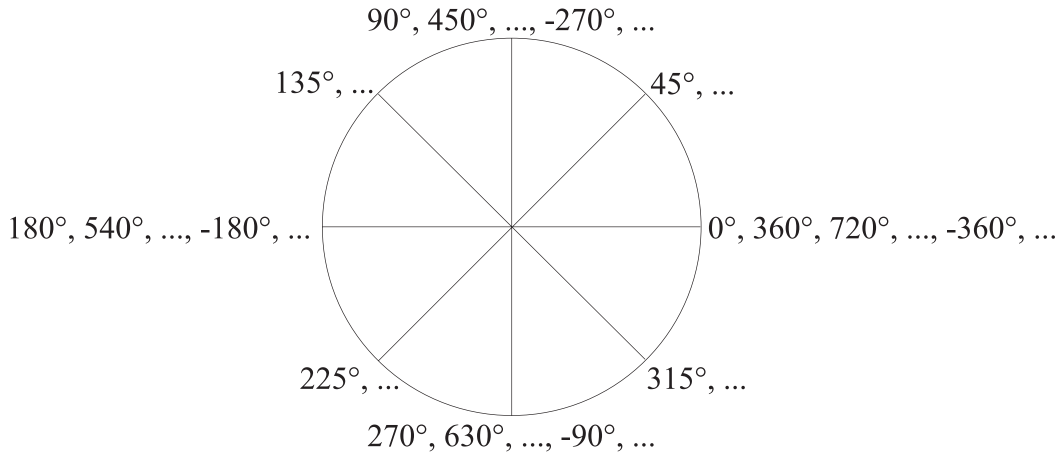


11.2 Meten van een hoek

Meten van een hoek in graden

We verdelen de cirkel in 360 gelijke delen die we graden noemen.

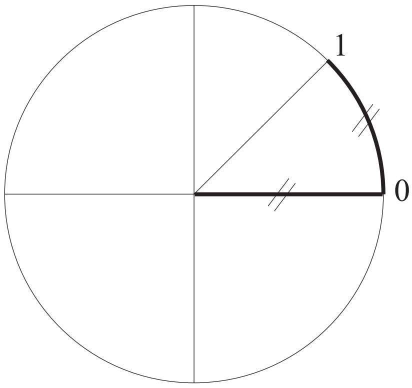
We doorlopen de cirkel in positieve zin (tegenwijzerzin) :

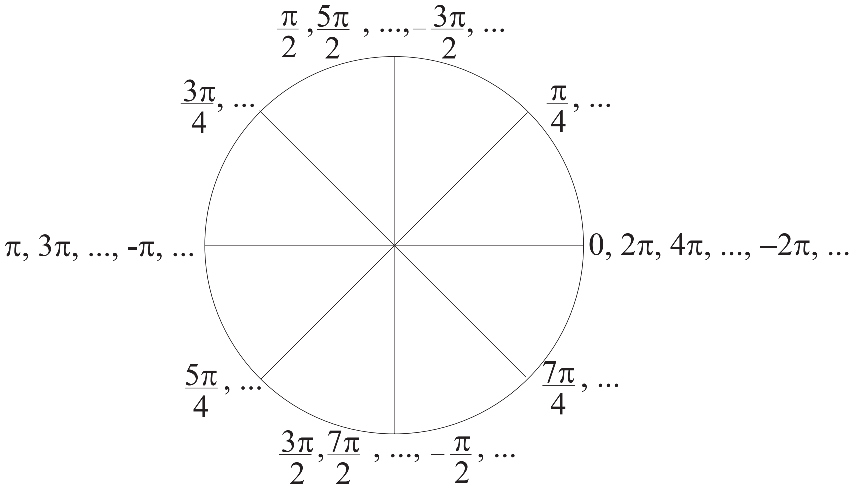


Meten van een hoek in radialen

Als men de straal (radius) tot lengte-eenheid kiest om de cirkel te meten dan is de lengte van de cirkel gelijk aan 2πrad.

We doorlopen de cirkel in positieve zin :





Afspraak : we vermelden de lengte-eenheid niet als deze de radiaal is.

Opmerkingen

- Maatgetallen die een geheel veelvoud van $360°$ ($= 2\pi$rad) van elkaar verschillen, duiden dezelfde georiënteerde hoek aan. Zo is bijvoorbeeld $45° \leftrightarrow -315° \leftrightarrow 405° \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} \leftrightarrow -\dfrac{15\pi}{4} \leftrightarrow \ldots$
- Bemerk dat we elk reëel getal kunnen opvatten als het maatgetal (in radialen) van een hoek.

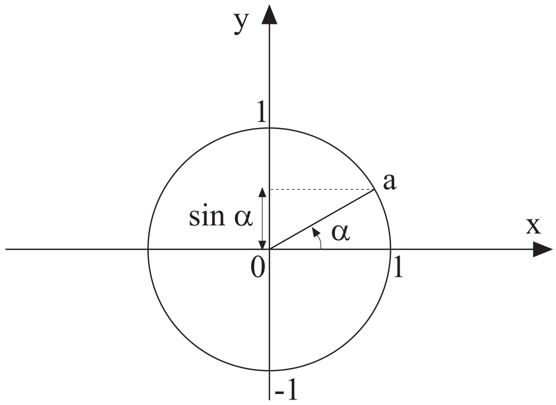
- Verband graad-radiaal:

$$\begin{aligned}
2\pi &\leftrightarrow 360^\circ \\
\pi &\leftrightarrow 180^\circ \\
\frac{\pi}{2} &\leftrightarrow 90^\circ \\
1 &\leftrightarrow \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ 18'
\end{aligned}$$

11.3 Goniometrische getallen van een hoek / Goniometrische functies

11.3.1 Sinus van een hoek / Sinusfunctie

Definitie



We beschouwen de (georiënteerde) hoek α en het corresponderend punt a op de goniometrische cirkel.

De y-coördinaat van het punt a noemen we de **sinus** van de hoek α.

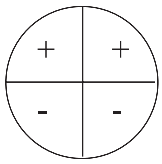
Gevolgen van de definitie

(1)

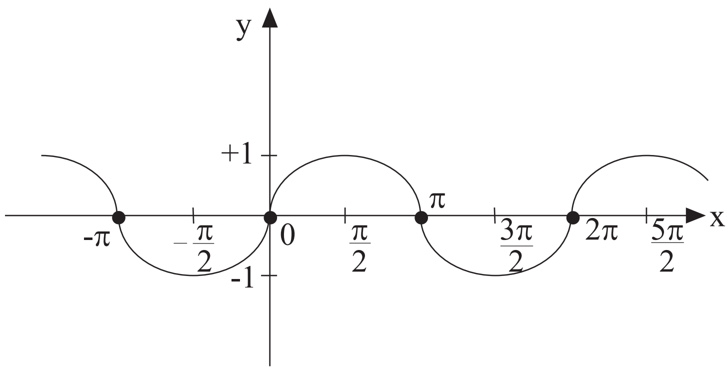
α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0

(2) $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

(3) Het teken van de sinus in de verschillende kwadranten :



Grafiek van $y = \sin x$



Opgelet : x moet worden uitgedrukt in radialen.

De sinusfunctie is periodiek met periode 2π.

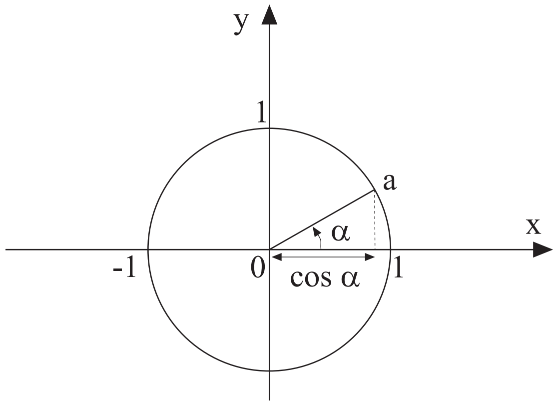
Opdracht

Gebruik een **GRT** om de grafiek van de sinusfunctie te plotten (Zoom/7:ZTrig).

11.3.2 Cosinus van een hoek / Cosinusfunctie

Definitie

De x-coördinaat van het punt a noemen we de **cosinus** van de hoek α.



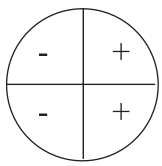
Gevolgen van de definitie

(1)

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1

(2) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

(3) Het teken van de cosinus in de verschillende kwadranten :



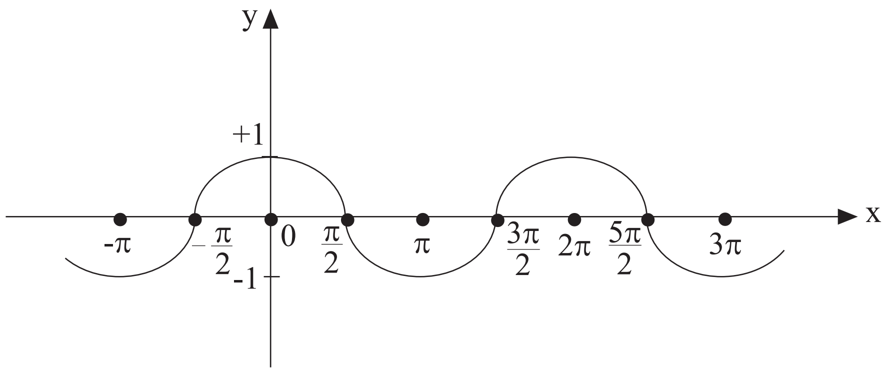
(4) Grondbetrekking van de goniometrie : $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$
(cf. stelling van Pythagoras !)

Hierbij is $\cos^2\alpha$, respectievelijk $\sin^2\alpha$, de notatie voor $(\cos\alpha)^2$, respectievelijk $(\sin\alpha)^2$.

Voorbeeld

$$\cos^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}=0^2+1^2=1$$

Grafiek van $y = \cos x$



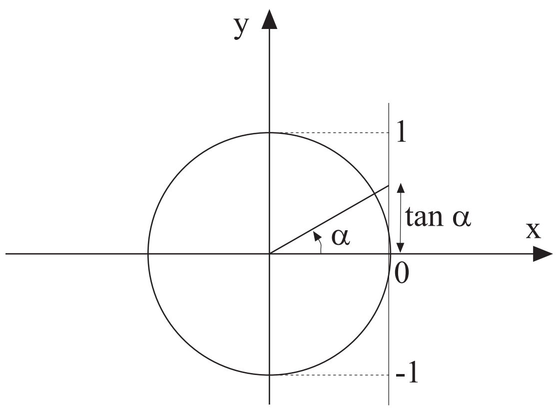
De cosinusfunctie is periodiek met periode 2π.

Opdracht

Gebruik een **GRT** om de grafiek van de cosinusfunctie te plotten (Zoom/7:ZTrig).

11.3.3 Tangens van een hoek / Tangensfunctie

Definitie

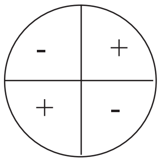


Gevolgen van de definitie

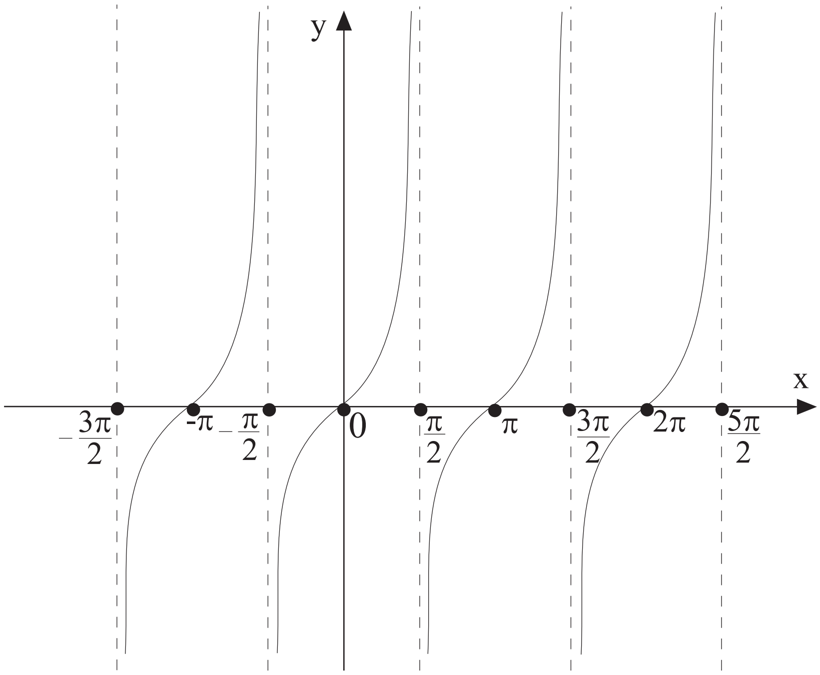
(1)

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\tan\alpha$	0	1	/	-1	0	1	/	-1	0

(2) Het teken van de tangens in de verschillende kwadranten :



Grafiek van $y = \tan x$



De tangensfunctie is periodiek met periode π.

Opdracht

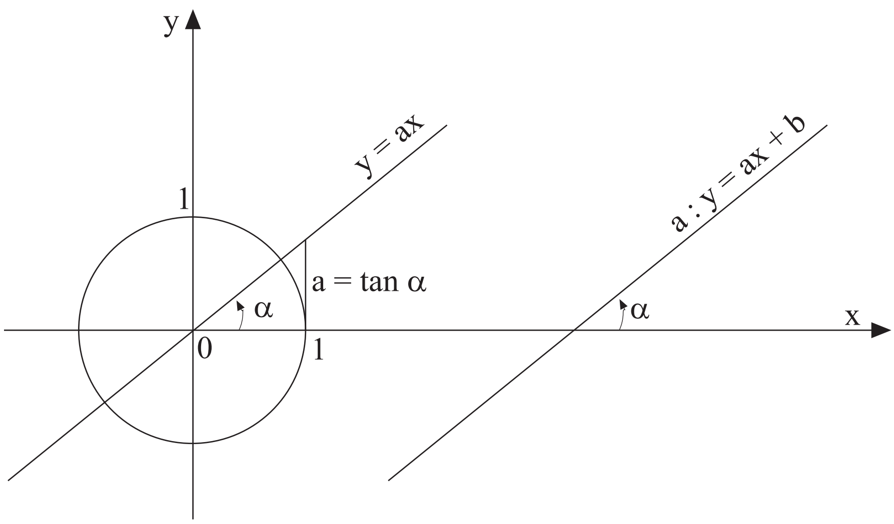
Gebruik een **GRT** om de grafiek van de tangensfunctie te plotten (Zoom/7:ZTrig).

Eigenschappen

(1) $\boxed{\tan\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ voor $\cos\alpha \neq 0$

(2) De tangens van de hellingshoek van een rechte is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van die rechte (in een orthonormaal assenstelsel)

Verklaring :



α is de hellingshoek van de rechte a

evenwijdige rechten hebben dezelfde hellingshoek.

Voorbeelden

$$a : y = x + 2 \;\Rightarrow\; rc\ a = 1 \;\Rightarrow\; \tan\,\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 45°$$

$$b : y = -x \;\Rightarrow\; rc\ b = -1 \;\Rightarrow\; \tan\,\beta = -1 \;\Rightarrow\; \beta = 135°$$

$$c : y = 1 \;\Rightarrow\; rc\ c = 0 \;\Rightarrow\; \tan\,\gamma = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = 0°$$

11.3.4 Overige goniometrische getallen

De volgende goniometrische getallen komen sporadisch voor.

Definities :

$$
\begin{array}{ll}
\text{cotangens : cotan } \alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} & \text{voor } \sin\alpha \neq 0 \\
\text{secans : sec } \alpha = 1/\cos\alpha & \text{voor } \cos\alpha \neq 0 \\
\text{cosecans : cosec } \alpha = 1/\sin\alpha & \text{voor } \sin\alpha \neq 0
\end{array}
$$

11.4 Opdrachten

1. Gevraagd : duid op de goniometrische cirkel het (de) punt(en) aan van de corresponderende hoek(en).

   (1) $\tan\,\alpha = -\dfrac{3}{2}$

   (2) $\sin\alpha = 0,7$

   (3) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. Bereken de overige goniometrische getallen (cos / sin / tan):

   (1) $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ en $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

   (2) $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ en $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

   (3) $\tan\,\alpha = \dfrac{7}{24}$ en $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

3. Bewijs de volgende gelijkheden :

   (1) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

   (2) $\sin^2 x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$

   (3) $\dfrac{\tan\,x - 1}{\sin x - \cos x} \cdot \dfrac{\sin x + \cos x}{\tan\,x + 1} = 1$

4. Bereken de volgende uitdrukking. Maak eventueel gebruik van een **GRT**.
   $\tan\left(\dfrac{-29\pi}{4}\right) - \sin\dfrac{2\pi}{3} + \cos\dfrac{7\pi}{6}$

5. De volgende tabel voor de goniometrische getallen van enkele veel voorkomende hoeken is een klassieker. Overtuig jezelf dat je de resultaten kan vinden m.b.v. een **GRT**.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

12 Limieten

12.1 De verzameling $\overline{\mathbb{R}}$

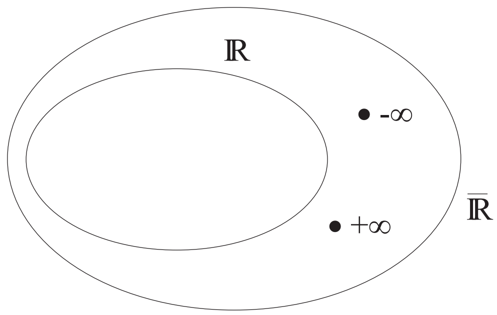
Gegeven is een deelverzameling van $\mathbb{R}$.
Soms bestaat er een getal dat groter (kleiner) of gelijk is aan alle elementen uit die deelverzameling.
Voorbeeld : $\forall x \in]3,4]$ geldt dat $x \leq 4$.
Dit is echter niet altijd het geval.

Voorbeeld

$\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$
Daarom breiden we $\mathbb{R}$ uit met de elementen plus-oneindig en min-oneindig die we zullen noteren als $+\infty$ en $-\infty$.

Definitie

$$\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \text{ met } \forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty}$$



Het is duidelijk dat $+\infty$ en $-\infty$ geen reële getallen zijn !

De **rekenregels** in $I\!R$ worden uitgebreid als volgt :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I\!R \quad &: \quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \\
& \quad\;\; x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \\
\forall x \in I\!R_0^+ \quad &: \quad x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty \\
& \quad\;\; x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty \\
\forall x \in I\!R_0^- \quad &: \quad x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty \\
& \quad\;\; x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty
\end{aligned}$$

Bovendien :

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{0} \to \infty \text{ (onbepaaldheid !)}$$

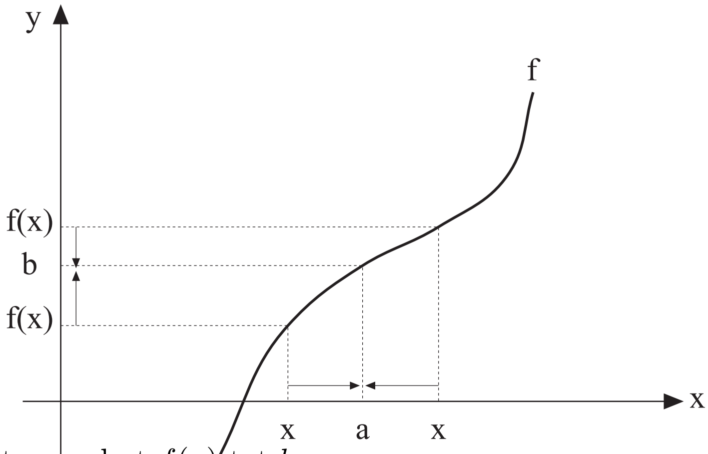
Ook de volgende uitdrukkingen zijn **onbepaaldheden** :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, +\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Afspraak : Met ∞ bedoelen we $+\infty$ of $-\infty$.

12.2 Informele invoering van het limietbegrip

Voorbeeld 1



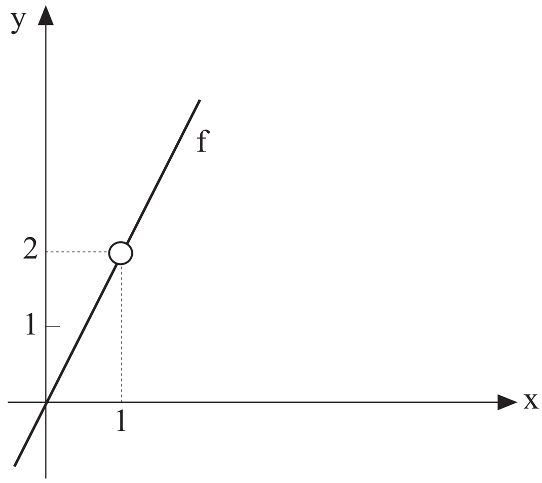
Als x nadert tot a, nadert $f(x)$ tot b.

Anders geformuleerd : voor x dicht bij a, maar verschillend van a, is $f(x)$ dicht bij b. We zeggen : de **limiet** van $f(x)$ voor x gaande naar a is b.

Notatie : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Voorbeeld 2

$f : I\!R \to I\!R : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 2x}{x-1}$ of $f : I\!R \to I\!R : x \mapsto \dfrac{2x(x-1)}{x-1}$ dom $f = I\!R \setminus \{1\}$



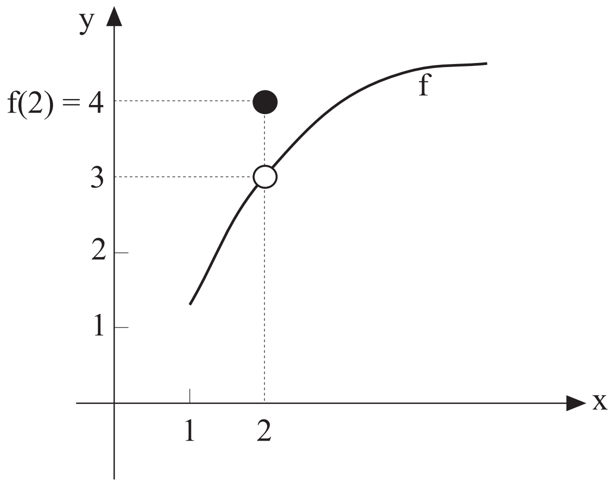
Als x nadert tot 1, nadert $f(x)$ tot 2.

We zeggen : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

Merk op dat $1 \notin \text{dom } f$. Toch bestaat de limiet voor $x \to 1$.

Gebruik een **GRT** om in voorbeeld 2 een tabel met functiewaarden te creëren. Onderzoek $f(x)$ voor $x \to 1$. Kies bijvoorbeeld 0.9, 0.99, 0.999, ... en 1.1, 1.01, 1.001, ... als x waarden. Let op de melding 'ERROR' als beeld van 1.

Voorbeeld 3



Als x nadert tot 2, nadert $f(x)$ tot 3.

We zeggen : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. Merk op dat $2 \in \text{dom } f$. Toch is $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$.

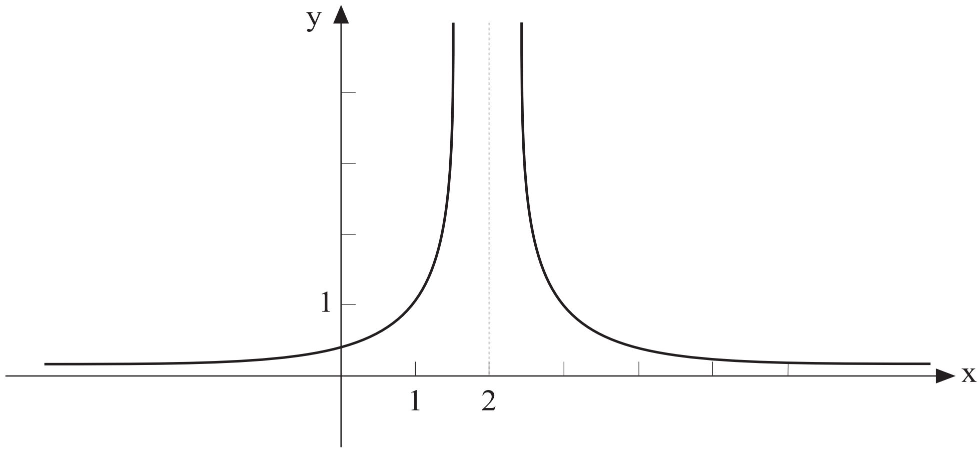
Voorbeeld 4

$f : I\!R \to I\!R : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ $\qquad$ $\text{dom } f = I\!R \backslash \{2\}$ Als x nadert tot 2, nadert $f(x)$ tot $+\infty$.

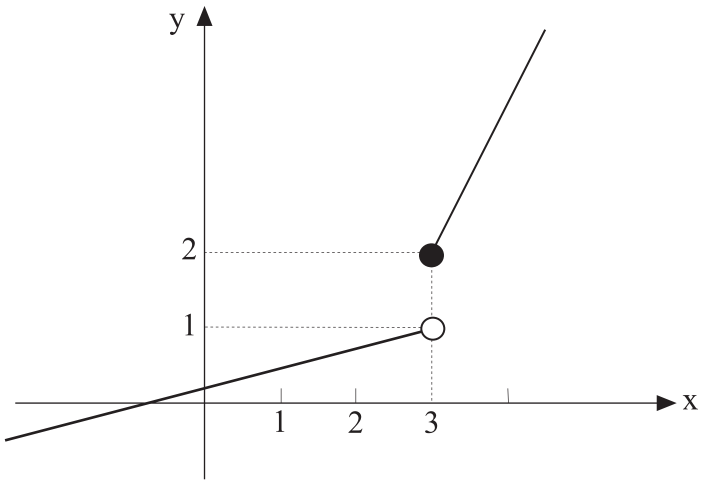
We zeggen : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

Volkomen analoog zeggen we :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x\to -\infty} f(x) &= 0\end{aligned}$$



Voorbeeld 5



We zeggen : $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ bestaat niet.

Indien echter x nadert tot 3 langs rechts (dus neem $x > 3$) dan nadert $f(x)$ tot 2.

We zeggen : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 3} f(x) = 2$ "**rechterlimiet**"

Indien x nadert tot 3 langs links (dus neem $x < 3$) dan nadert $f(x)$ tot 1.

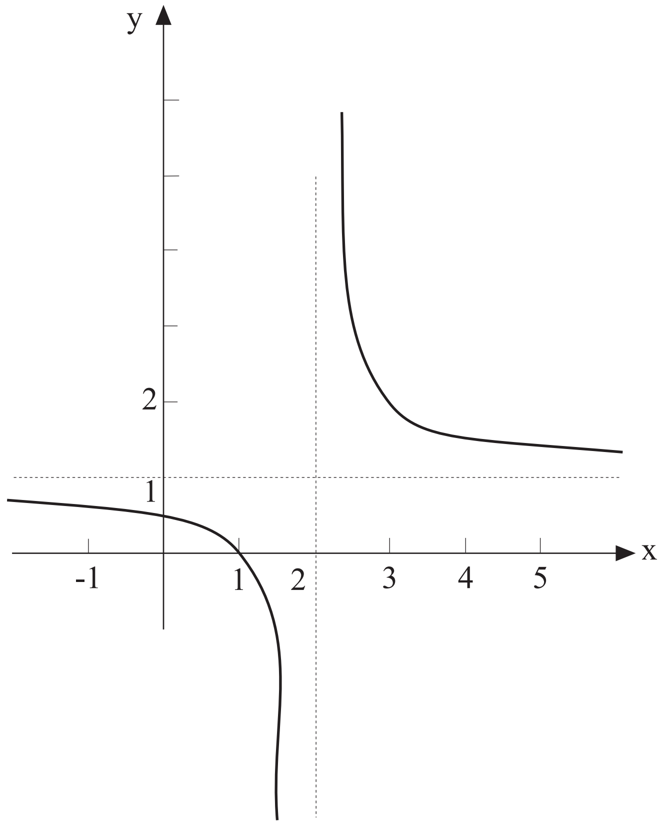
We zeggen : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 3} f(x) = 1$ "**linkerlimiet**"

Het is duidelijk dat

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

Voorbeeld 6

$f : I\!R \to I\!R : x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$ $\qquad$ dom $f = I\!R \backslash \{2\}$



$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ bestaat niet

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 2} f(x) = -\infty$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 4} f(x) = f(4) = \frac{3}{2}$

Opdracht

Gebruik een **GRT** om in de voorbeelden 4 en 6 de vermelde limieten te verifiëren. Creëer hiervoor tabellen.

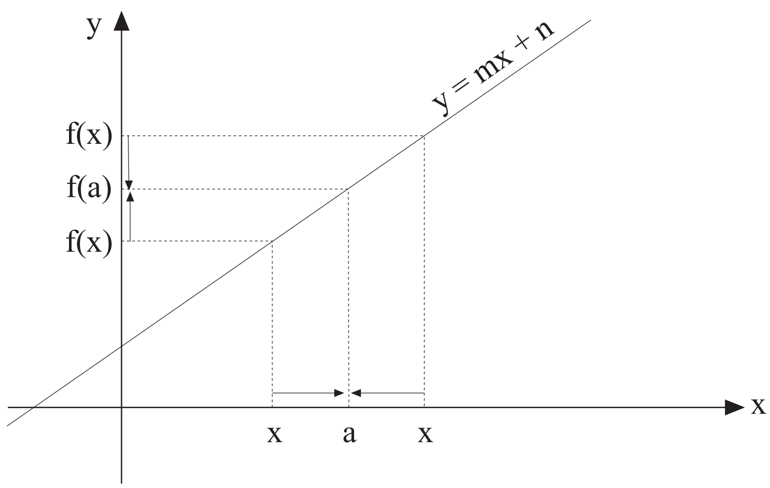
Gebruik vervolgens een **GRT** voor een grafische controle van de vermelde limieten.

We zullen niet ingaan op de formele definities van limiet van een functie in een punt.

12.3 Limietstellingen

1. Enkele belangrijke limieten

(a) $\lim_{x \to a}(mx + n) = ma + n \qquad (m, n \in \mathbb{R})$



Voorbeelden

$$\lim_{x\to -2}(3x-4) = 3(-2)-4 = -10$$

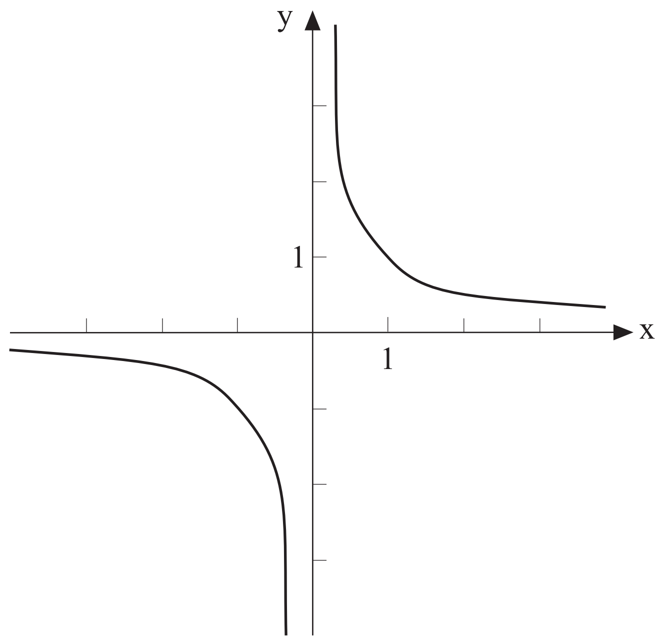
$$\lim_{x\to +\infty}(3x-4) = 3(+\infty)-4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}(-4) = -4$$

$$\lim_{x\to 3}(-4) = -4$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0\\ <}}\frac{1}{x} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0\\ >}}\frac{1}{x} = +\infty$



2. Stellingen in verband met de limiet van een bewerking

Indien beide leden van volgende uitdrukkingen gedefinieerd zijn in $\overline{I\!R}$, kan men er de gelijkheid van aantonen.
Deze eigenschappen blijven eveneens geldig bij beperking tot linker- of rechterlimieten.

1. $\lim_{x \to a} rf = r \lim_{x \to a} f \qquad (r \in I\!R)$
2. $\lim_{x \to a} (f + g) = \lim_{x \to a} f + \lim_{x \to a} g$
3. $\lim_{x \to a} f \cdot g = \lim_{x \to a} f \cdot \lim_{x \to a} g$
4. $\lim_{x \to a} \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f}$
5. $\lim_{x \to a} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \to a} f}{\lim_{x \to a} g}$
6. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \qquad (n \in I\!N_0)$
7. $\lim_{x \to a} [f(x)]^p = [\lim_{x \to a} f(x)]^p \qquad (p \in I\!R)$
8. $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\lim_{x \to a} g(x)}$

Voorbeelden

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{5} = -\frac{1}{5} \lim_{x \to +\infty} x = -\frac{1}{5}(+\infty) = -\infty$

2) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x + \frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0} x + \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = 0 + (-\infty) = -\infty$

3) $\lim_{x \to 2}((x-1) \cdot (x+2)) = \lim_{x \to 2}(x-1) \cdot \lim_{x \to 2}(x+2) = 1 \cdot 4 = 4$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{\lim_{x \to +\infty}(2x+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-2}{x^2+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)} = \dfrac{4}{5}$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}} = \sqrt[5]{\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x}} = \sqrt[5]{0} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{(x^3+2x+1)^2} = \sqrt[3]{[\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3+2x+1)]^2} = \sqrt[3]{(+\infty)^2} = +\infty$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{5x+1}{x}} = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x+1}{x}} = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to +\infty}(5+\frac{1}{x})} = 0^5 = 0$

Opmerking

De voorgaande stellingen bevatten een voorwaarde :

"indien de som, het product, het veelvoud ... gedefinieerd is in $\overline{\mathbb{R}}$".

De limietstelling van de optelling kan men als volgt formuleren.

$$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) \text{ bestaat} \\ \text{en } \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) \end{cases}$$

Het omgekeerde is echter geen stelling.

Dit betekent dat, als $\lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ niet gedefinieerd is in $\overline{\mathbb{R}}$, men **niet** mag besluiten dat $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ niet bestaat. M.a.w. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ kan bestaan, terwijl $\lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ niet gedefinieerd is in $\overline{\mathbb{R}}$.

B.v. $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 + \lim\limits_{x\to -\infty} x \ \rightarrow \ (+\infty) + (-\infty)$.

Deze laatste vorm is niet gedefinieerd in $\overline{\mathbb{R}}$.

We zullen echter verder aantonen dat $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+x) = +\infty$.

3. Stelling in verband met de limiet van een samengestelde functie

Als $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ en $\lim\limits_{x\to b} g(x) = g(b)$

dan $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x\to a} f(x)) = g(b)$

Voorbeeld

$\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a \dfrac{x+1}{x} = \log_a \left(\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x}\right) = \log_a \left(\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\dfrac{1}{x})\right) = \log_a 1 = 0$

4. Stelling in verband met het bestaan van een limiet

Veronderstel dat f gedefinieerd is in een omgeving van $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad (a \in \mathbb{R})$$

asa

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b \ \text{ en } \ \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = b$$

(linker- en rechterlimiet bestaan en zijn gelijk)

Opmerking

Met een omgeving van a bedoelen we een verzameling

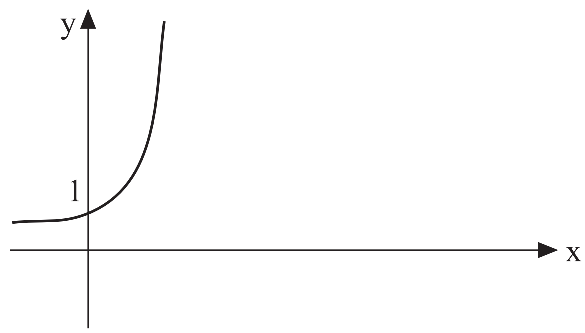
$$\begin{array}{lll}]a-\delta, a+\delta[& \text{indien } a \in \mathbb{R} & (\delta \in \mathbb{R}_0^+) \\ ]c, +\infty] & \text{indien } a = +\infty & (c \in \mathbb{R}) \\ [-\infty, c[& \text{indien } a = -\infty & (c \in \mathbb{R}) \end{array}$$

5. Limieten van exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies

- $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$



- $0 < a < 1$

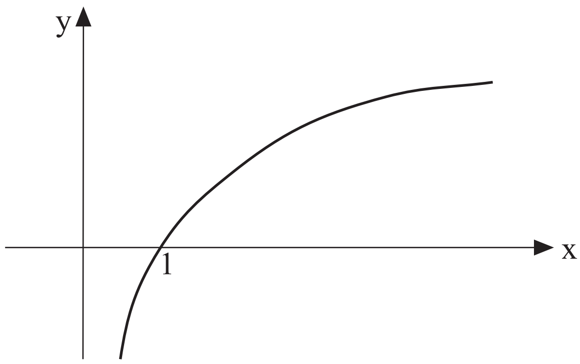
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

- $a > 1$

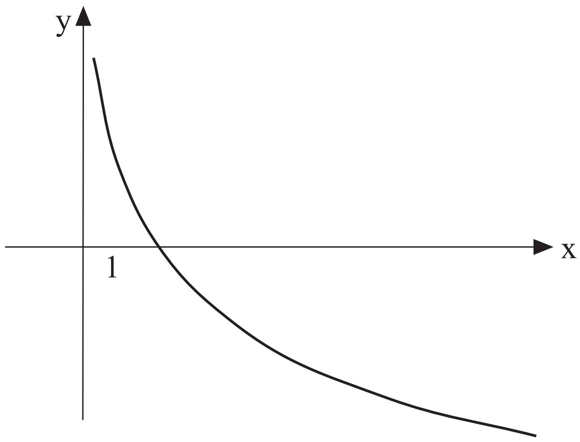
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \log_a x = -\infty$$



- $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \log_a x = +\infty$$



- $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ bestaat niet in $\overline{I\!R}$: bij onbeperkt toenemende x neemt $\sin x$ elke waarde tussen -1 en 1 "oneindig dikwijls" aan, maar $\sin x$ zal zich telkens opnieuw verwijderen van deze waarde.

  $\lim_{x \to -\infty} \sin x$ bestaat niet in $\overline{I\!R}$

  $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ bestaat niet in $\overline{I\!R}$ / $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ bestaat niet in $\overline{I\!R}$

  $\lim_{x \to +\infty} \tan x$ bestaat niet in $\overline{I\!R}$ / $\lim_{x \to -\infty} \tan x$ bestaat niet in $\overline{I\!R}$.

12.4 Praktische berekening van limieten

In de onderstaande stelling stelt f een veeltermfunctie, een rationale, irrationale, goniometrische, exponentiële of logaritmische functie voor.

Stelling

Als f gedefinieerd is in een omgeving van a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$) dan geldt :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

(limietwaarde gelijk aan functiewaarde)

Voorbeelden

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x + 5) = 3(+\infty) + 5 = +\infty + 5 = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to 5} 7 = 7$

(4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan \dfrac{\pi}{4} = 1$

(5) $\lim\limits_{x \to 16} \log_2 x = \log_2 16 = 4$

Om $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ te berekenen zal men steeds de hoofdregel "limietwaarde is gelijk aan functiewaarde" toepassen. Dit leidt vaak tot vormen die niet gedefinieerd zijn in $\overline{\mathbb{R}}$. Dit betekent dat de toepassing van de stelling faalt (oorzaak : $a \notin \text{dom } f$) en dat niet eens geweten is of de gevraagde limiet bestaat. We zeggen dat het onderzoek tot een onbepaalde vorm geleid heeft. Via bijzondere rekentechnieken zullen we er soms in slagen de gevraagde limiet te bepalen.
We herhalen hier enkele van deze rekentechnieken en stellingen.

Opmerking : Treffen we bij het berekenen van een limiet een onbepaalde vorm aan van het type $\dfrac{0}{0}$ of $\dfrac{\infty}{\infty}$, dan kan de onbepaaldheid dikwijls opgeheven worden door de stelling van de l'Hôpital toe te passen. Ook andere onbepaalde vormen $(0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0)$ kunnen we via deze weg onderzoeken, maar dan moeten ze eerst omgezet worden tot het type $\dfrac{0}{0}$ of $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Voor een behandeling van de stelling van de L'Hôpital verwijzen we naar de cursus van het eerste jaar.

1 De onbepaalde vorm $\boxed{\frac{0}{0}}$

(a) Rationale functies

De limiet van een rationale functie in a waarbij zowel de teller als de noemer limiet nul hebben, vinden we door in teller en noemer factoren $x - a$ af te zonderen en te delen door $x - a$.

Voorbeelden

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} \to \dfrac{0}{0}$

Dus $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x + 3}{x + 1} = \dfrac{5}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3 - 8x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 4} \to \dfrac{0}{0}$

Dus $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3 - 8x^2 + 8x}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} 2x = 4$

(b) Irrationale functies

De limiet van een irrationale functie in a waarbij $f(x)$ een breuk is waarvan teller en noemer als limiet nul hebben, vindt men als volgt :
Rationaliseer teller en/of noemer, deel teller en noemer door $x - a$.

Voorbeelden

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \to \dfrac{0}{0}$

$$\text{Dus } \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x+3}} \to \dfrac{0}{0}$

$$\text{Dus } \lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})(2+\sqrt{x+3})}{(2-\sqrt{x+3})(x+\sqrt{x})(2+\sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-x)(2+\sqrt{x+3})}{(4-x-3)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{-(x-1)(x+\sqrt{x})}$$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{x(2+\sqrt{x+3})}{x+\sqrt{x}} = -2$$

2. De onbepaalde vorm $\boxed{\dfrac{r}{0}}$ **met** $r \in \mathbb{R}_0$

In dit geval onderzoekt men de rechter- en linkerlimiet.

Indien deze limieten gedefinieerd zijn in $\overline{\mathbb{R}}$, dan zijn ze ofwel gelijk aan $+\infty$ ofwel aan $-\infty$. We verduidelijken dit met enkele voorbeelden.

Voorbeelden

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x}{(x-3)(2x-1)} \to \dfrac{6}{0}$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x^2-x}{(x-3)(2x-1)} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{x^2-x}{2x-1} \cdot \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3} = \frac{6}{5}(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x^2-x}{(x-3)(2x-1)} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x^2-x}{2x-1} \cdot \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3} = \frac{6}{5}(+\infty) = +\infty$$

dus bestaat $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x}{(x-3)(2x-1)}$ niet in $\overline{\mathbb{R}}$.

x		3		
$x-3$	$-$	0		$+$
$\frac{1}{x-3}$	$-$	$/$		$+$
		L.L	R.L	
		$-\infty$	$+\infty$	

2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-3}{-3x^3-4x^2+x+2} \to \dfrac{-3}{0}$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-3}{(x+1)^2(-3x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{-3}{-3x+2} \cdot \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{3}{5} \cdot (+\infty) = -\infty$$

3) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 3} \dfrac{x}{\sqrt{x-3}} \to \dfrac{3}{0}$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{x}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x \underset{>}{\to} 3} x \cdot \lim_{x \underset{>}{\to} 3} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} \to \dfrac{1}{0}$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x \underset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim_{x \underset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x \underset{>}{\to} \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim_{x \underset{>}{\to} \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

dus bestaat $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$ niet.

x		$\frac{\pi}{2}$		
$\cos x$	$+$	0		$-$
$\frac{1}{\cos x}$	$+$	$/$		$-$
		L.L	R.L	
		$+\infty$	$-\infty$	

Verifieer de resultaten aan de hand van de grafiek van $y = \tan x$.

3. De limiet van een veeltermfunctie in $\pm\infty$

De limiet van een veeltermfunctie in $\pm\infty$ is gelijk aan de limiet van de term met de hoogste graad.

Voorbeelden

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3 - x + 5) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3) = -2(-\infty)^3 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-x)(x-2)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^4 = -(+\infty)^4 = -\infty$

4. De limiet van een rationale functie in $\pm\infty$

De limiet van een rationale functie in $\pm\infty$ is gelijk aan de limiet van het quotiënt van de hoogstegraadstermen in teller en noemer.

Voorbeelden

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4 - 6x^3 + 1}{x^3 + x + \sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{-3x^2 + 5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - x^2 - 1}{3 - x + x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

5. De limiet van een irrationale functie in $\pm\infty$ als $f(x)$ een breuk is

De limiet van een irrationale functie in $\pm\infty$ als $f(x)$ een breuk is vinden we door in teller en noemer de hoogste macht van x vooraan te brengen en te vereenvoudigen.

Opletten !

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} +x & \text{als } x > 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

$\forall x$ geldt $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$

$$\sqrt{x^6} = |x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{als } x > 0 \\ -x^3 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{x^{12}} = |x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{als } x > 0 \\ -x^3 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

$\forall x$ geldt $\sqrt[3]{x^3} = x$

$\forall x$ geldt $\sqrt[5]{x^{15}} = x^3$

$\forall x$ geldt $\sqrt[3]{x^6} = x^2$

Voorbeelden

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{3}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} = 2$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{3}{x})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{3}{x})} = -2$$

$$3)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x^2(1+\frac{3}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{3}{x^2})} = \frac{-2}{-\infty} = 0$$

4) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+5x-1}+7x}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt[4]{1+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+7x}{2x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt[4]{1+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+7\right)}{x(2-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt[4]{1+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+7}{2-\frac{1}{x}} = 3$$

12.5 Opdrachten

Bereken de volgende limieten. Maak zo nodig een onderscheid tussen linker- en rechterlimiet.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4x+2}{x^2-x-4}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-7x+12}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5}$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x \ \tan\ x}$

9. $\lim_{x \to 10} \frac{x\sqrt{x-3}}{(x-10)^2}$

10. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x+4}{x^2+2x+5}$

11. $\lim_{x \to \infty} x(x-1)(x-2)(x-3)^2$

12. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{x-1}{4+x}}$

13. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+3}$

14. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt[4]{x^4-4x^2}}$

15. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{x}$

16. $\lim_{x \to \infty} \frac{x+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2x}$

17. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{x \sin 2x}$

18. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-4}{2x^2-4x+6}$

19. $\lim_{x \to \infty} x^6(x-2) - x^5(x^2-3)$

20. $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}-1}$

21. $\lim_{x \to +\infty} 3^{-x}$

22. $\lim_{x \to -\infty} 3^{-x}$

23. $\lim_{x \to +\infty} (x \log_{10} x)$

24. $\lim_{x \to 0} \log_5 x$

25. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) \to +\infty - \infty$ onbepaaldheid.

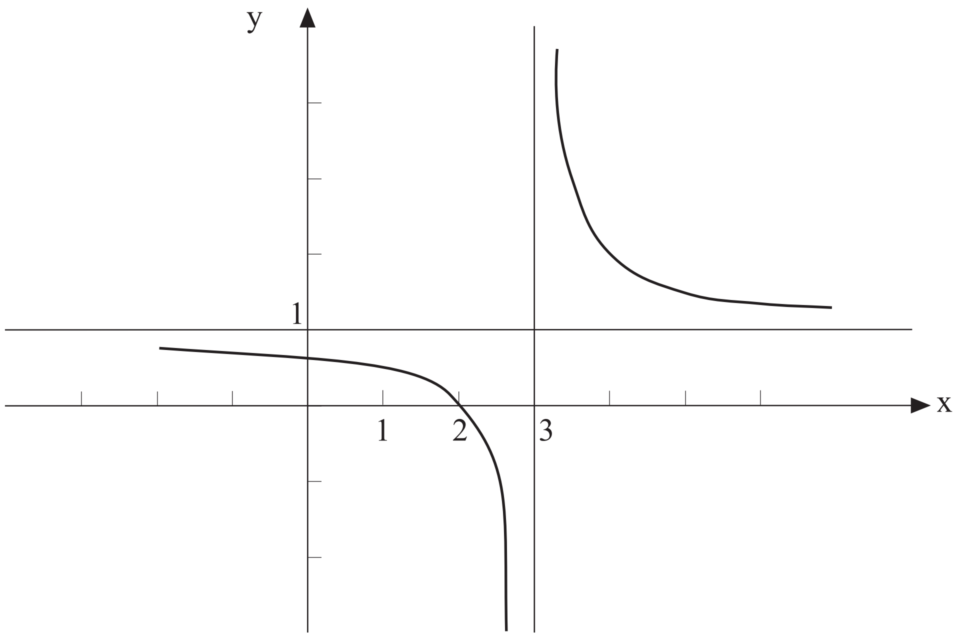
    Hint: vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{x^2 - 1} + x$.

13 Asymptoten bij de grafiek van een functie

13.1 Verticale en horizontale asymptoten

Voorbeeld

$y = f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$



We zeggen : de rechte met vergelijking $x = 3$ is een verticale asymptoot (V.A.) ;
de rechte met vergelijking $y = 1$ is een horizontale asymptoot (H.A.).

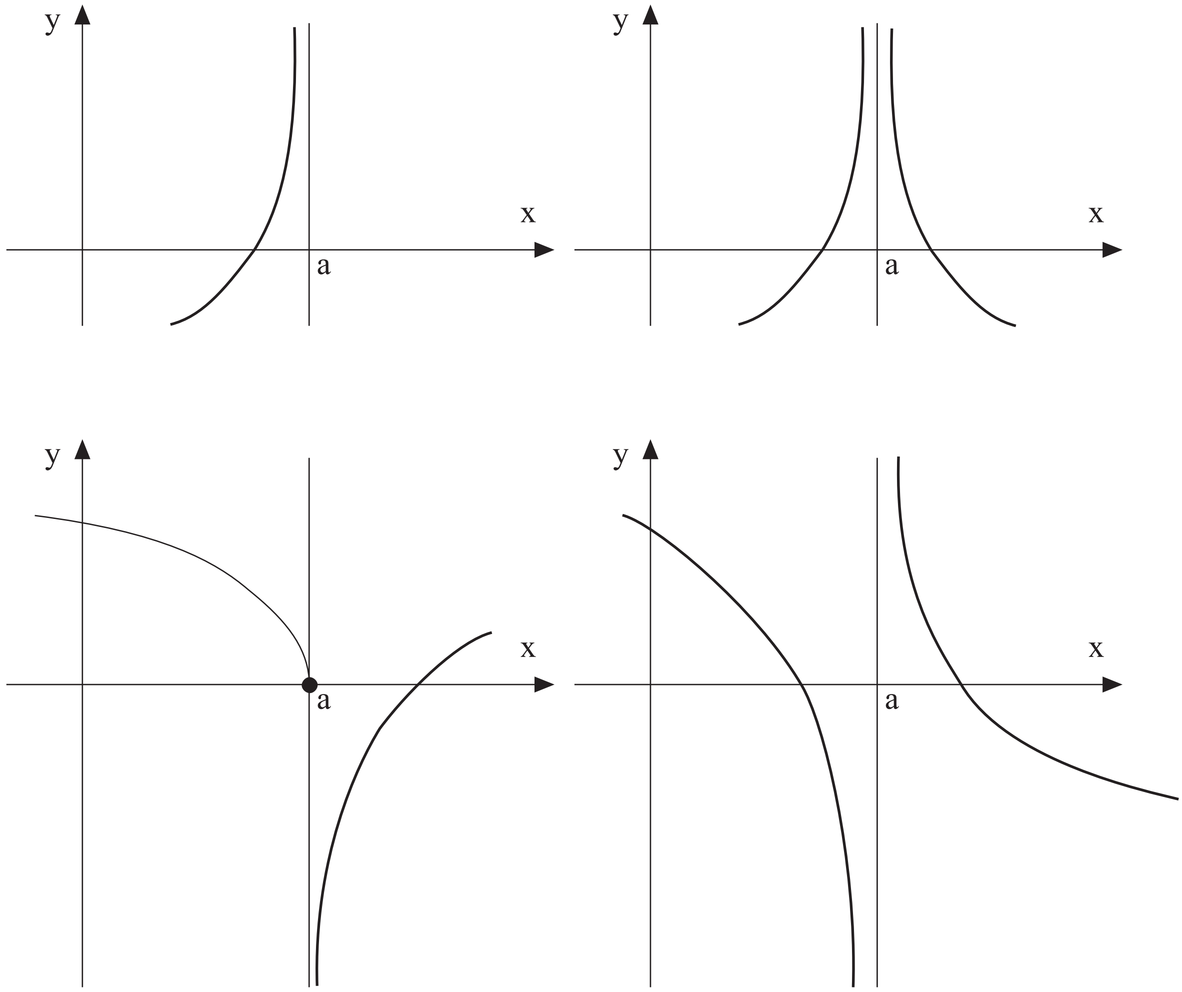
Definitie

De rechte met vergelijking $x = a$ $(a \in \mathbb{R})$ is een **verticale asymptoot** van f

asa

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \text{ en/of } \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty$$

Voorbeelden



Opmerkingen

(1) Wanneer zowel de teller als de noemer veeltermen zijn, dan zijn de waarden a in de definitie voor V.A. de nulpunten van de noemer die geen nulpunten zijn van de teller.

(2) In het algemeen zijn de kanshebbers voor de waarde a in de definitie voor V.A. de (reële) randpunten van het domein die niet tot het domein behoren.

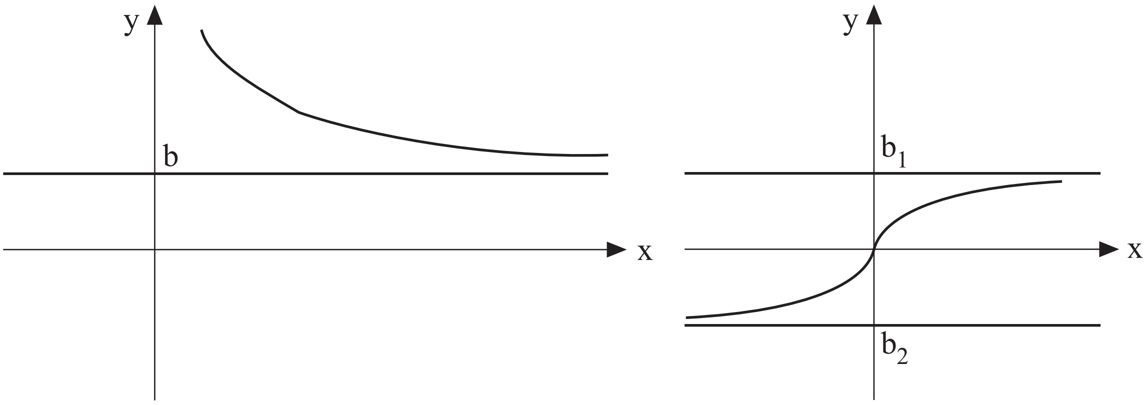
Definitie

De rechte met vergelijking $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$) is een **horizontale asymptoot** van f

asa

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ en/of $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Voorbeelden



Voorbeelden op het zoeken van V.A. en H.A.

(1) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

V.A. : $\boldsymbol{x = 1}$

H.A. : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\boldsymbol{y = 2}$ voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$.

(2) $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

V.A. : $\boldsymbol{x = 3}$ en $\boldsymbol{x = 1}$

H.A. : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0$

$\boldsymbol{y = 0}$ voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$.

(3) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

V.A. : geen

H.A. : $\boldsymbol{y = 0}$ voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$.

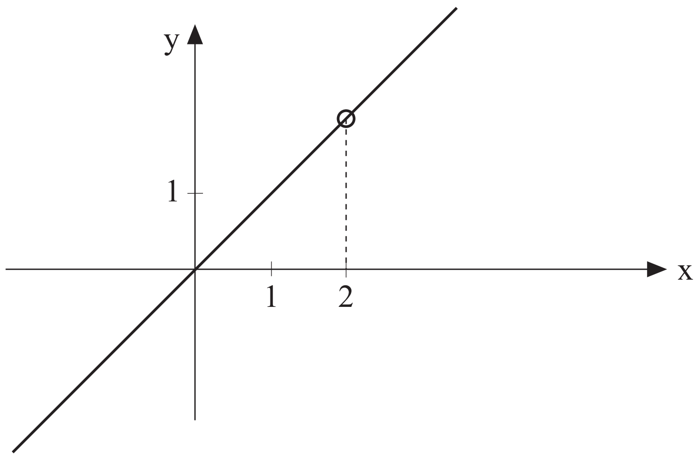
(4) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$

V.A. : geen (Verklaar !)

H.A. : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty \notin I\!R$ dus geen H.A.

Merk op dat $y = f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-2} = \dfrac{x(x-2)}{x-2}$ met dom $f = I\!R\setminus\{2\}$

en **als** $x \neq 2$ **dan**$f(x) = x$



(5) $y = f(x) = \tan x$

dom $f = I\!R\setminus\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Bijgevolg zijn alle elementen van $\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ kanshebbers voor a.

Bemerk dat

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ >}} \tan x = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to \frac{3\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x \to \frac{3\pi}{2} \\ >}} \tan x = -\infty$$

enz... zodat

V.A. : $\boxed{\begin{array}{llll} x = \dfrac{\pi}{2} & x = \dfrac{3\pi}{2} & x = \dfrac{5\pi}{2} & \text{enz...} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} & x = -\dfrac{3\pi}{2} & x = -\dfrac{5\pi}{2} & \text{enz...} \end{array}}$

H.A. : $\lim\limits_{x \to \infty} \tan x$ bestaat niet in $\overline{I\!R}$ dus geen H.A.

(6) $y = f(x) = \log_2 x$

V.A. : dom $f = I\!R_0^+$ dus $a = 0$ is een kanshebber.

We onderzoeken $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Welnu, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ zodat $x = 0$ is een V.A. voor $x \underset{>}{\to} 0$.

H.A. : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ bestaat niet in $\overline{I\!R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \notin I\!R$

dus geen H.A.

Gevolgen van de definities voor V.A. en H.A.

(1) Bij de grafiek van een functie f kunnen meerdere V.A. voorkomen (zelfs oneindig veel).

(2) Bij de grafiek van een functie f kunnen ten hoogste twee H.A. voorkomen, bijvoorbeeld een H.A. voor $x \to +\infty$ en een andere H.A. voor $x \to -\infty$.

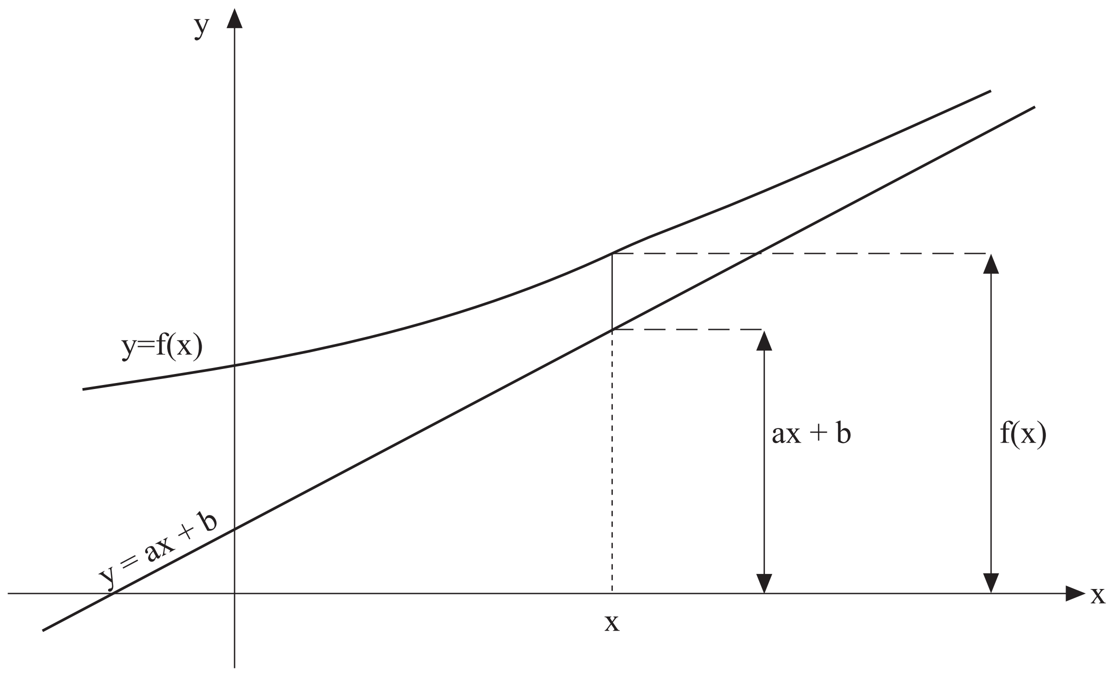
(3) Bij een breuk van twee veeltermen geldt :

grd $T \leq$ grd N dan precies één H.A.

grd $T >$ grd N dan geen H.A.

(4) Een veeltermfunctie (met grd ≥ 1) heeft geen V.A. en geen H.A.

13.2 Schuine asymptoten



Definitie

De rechte met vergelijking $y = ax + b \quad (a \in \mathbb{R}_0,\, b \in \mathbb{R})$ is een **schuine asymptoot** van f asa $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ en/of $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

Gevolg

Uit de definitie volgt dat men a en b als volgt kan berekenen :

$$\boxed{a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (a \in \mathbb{R}_0) \qquad\qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] \qquad (b \in \mathbb{R})}$$

Voorbeelden

Bereken de asymptoten van de volgende functies :

(1) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

V.A. : $x = 0$

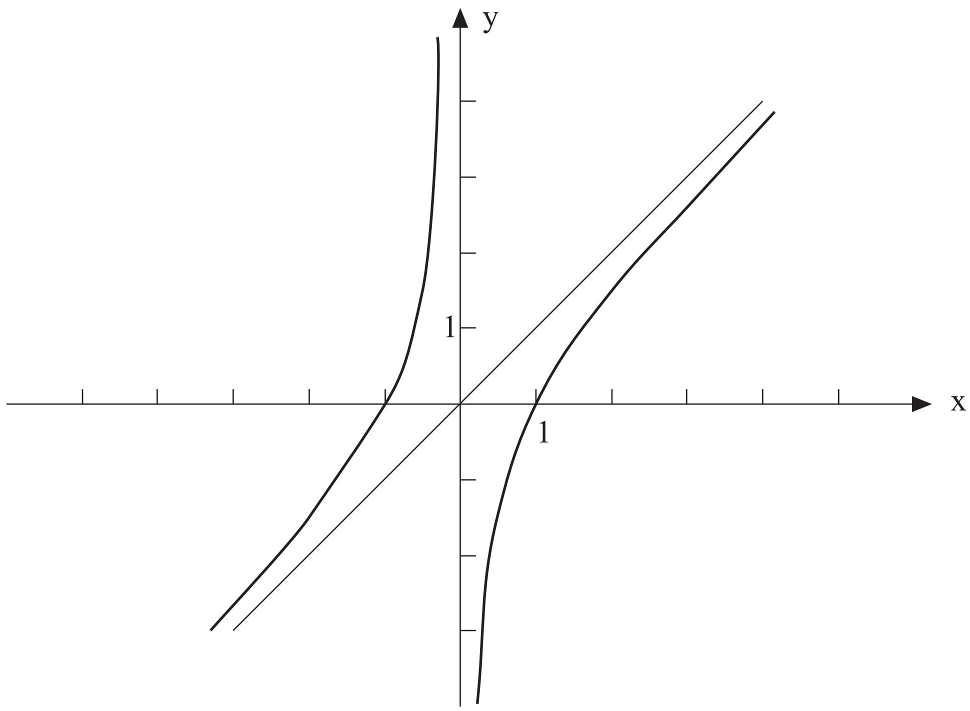
H.A. : geen

S.A. :

$a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 \in I\!R_0$

$b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to\infty} [\dfrac{x^2-1}{x} - x] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} = 0 \in I\!R$

Besluit : de rechte met vergelijking $y = x$ is een S.A.



(2) $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$

V.A. : geen (dom $f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ dus geen randpunten die niet tot het domein behoren)

H.A. : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \notin I\!R$ dus geen H.A.

S.A. :

$*$ voor $x \to +\infty$

$a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{fx)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 \in I\!R_0$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0 \in I\!R$

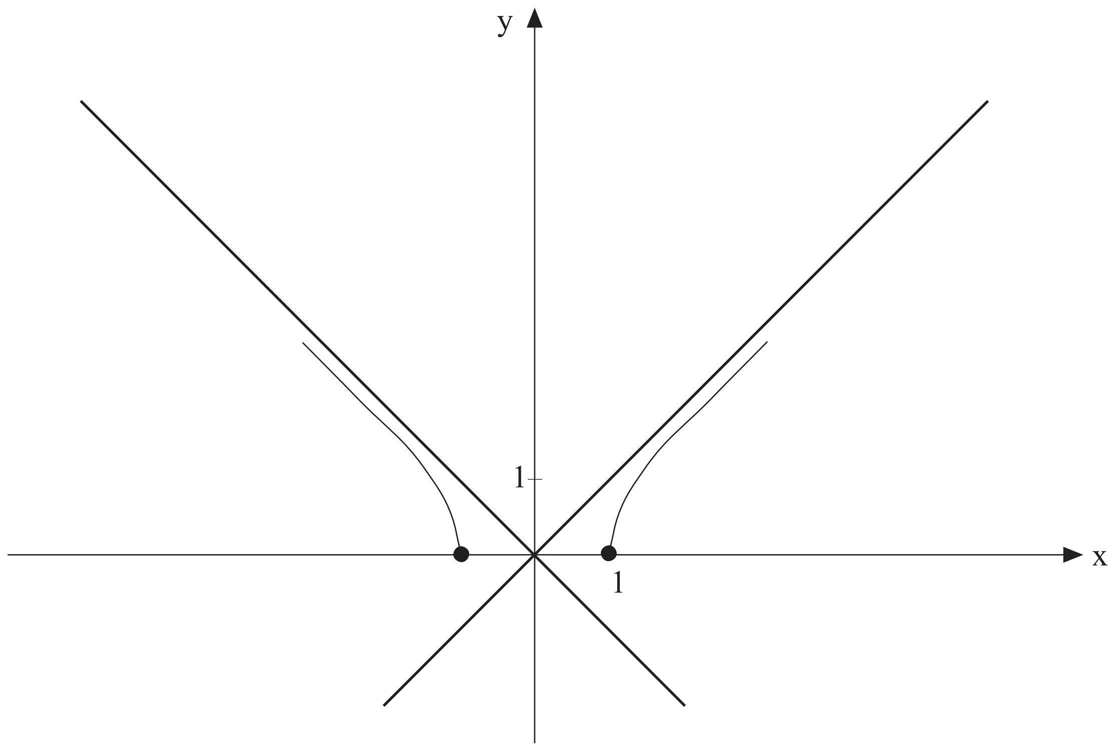
Besluit : $y = x$ is S.A. voor $x \to +\infty$.

$*$ voor $x \to -\infty$

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = -1 \in I\!R_0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2-1} + x] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x} = 0 \in I\!R$$

Besluit : $y = -x$ is S.A. voor $x \to -\infty$.



Gevolgen van de definitie voor S.A.

(1) Bij de grafiek van een functie f kunnen ten hoogste twee S.A. voorkomen, bijvoorbeeld een S.A. voor $x \to +\infty$ en een andere S.A. voor $x \to -\infty$.

(2) Bij een breuk van twee veeltermen geldt : grd T = grd $N + 1$ dan heeft f precies één S.A.; in de andere gevallen heeft f geen S.A.

(3) Een veeltermfunctie (met grd ≥ 2) heeft geen S.A.

(4) Wanneer men voor een functie f het aantal H.A. optelt met het aantal S.A. dan vindt men 2 of 1 of 0 :

$+\infty$ kan ofwel een H.A. ofwel een S.A. opleveren;

$-\infty$ kan ofwel een H.A. ofwel een S.A. opleveren.

13.3 Opdrachten

Zoek de asymptoten van de volgende functies

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 1}$

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x + 3}$

5. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 3x}$

6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

7. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

De oefeningen 9 t.e.m. 12 zijn bedoeld voor 'gevorderden'. Je moet o.a. de regel van de l'Hôpital beheersen.

9. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

10. $f(x) = e^{1/x}$

11. $f(x) = \dfrac{\text{bgsin } x}{x}$

12. $f(x) = \dfrac{(x + \sqrt{x^2+1})(x-1)}{x-3}$

14 De natuurlijke exponentiële en logaritmische functies

14.1 Het getal *e*

Creëer een tabel met functiewaarden voor $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$. Gebruik een **GRT**.

Ga na dat, aangezien het grondtal in $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ strikt positief moet zijn, $dom\ f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

x	$\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ (tot op 4 decimalen)	x	$\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ (tot op 4 decimalen)
1	2		
2	2,25	-2	4
3	2,3704	-3	3,375
$\vdots$		$\vdots$	
10	2,5937	-10	2,868
$\vdots$		$\vdots$	
100	2,7048	-100	2,732
$\vdots$		$\vdots$	
1 000	2,7169	-1 000	2,7196
$\vdots$		$\vdots$	
10 000	2,7181	-10 000	2,7184
$\vdots$		$\vdots$	
1 000 000 000	2,7183	-1 000 000 000	2,7183

Men kan bewijzen dat $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ bestaan in $\mathbb{R}$ en gelijk zijn. Dat reële getal definiëren we als ‘het getal e’.

Definitie

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Opmerkingen

- In de definitie worden in feite twee limieten opgeschreven:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ en } \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

- In de definitie gaat $x \to \infty$ met $x \in \mathbb{R}$. Bij het maken van een illustratieve tabel moet dus niet noodzakelijk gekozen worden voor gehele x-waarden.

- $\boldsymbol{e \approx 2,71828}$

- Het getal e is een irrationaal getal ($e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$), d.w.z.

  - e is niet te schrijven als een breuk van gehele getallen;

  - als e decimaal wordt genoteerd is er geen repetitie na de komma.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{\text{‘vul in’}}{\longrightarrow} 1^\infty$
  Toch is de limiet niet gelijk aan 1. De uitdrukking 1^∞ is dus duidelijk een onbepaaldheid.

- Aan het getal e kan een belangrijke economische interpretatie gegeven worden. Het getal e ontstaat namelijk op een natuurlijke wijze bij “het principe van continu samengestelde interest”.

De volgende eigenschap is soms handig.

Eigenschap

$$\forall r \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r$$

Het bewijs (voor $r \in I\!\!R_0$) is een gewone berekening:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{r}}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{r}}\right)^{\frac{x}{r}}\right]^r \\
&= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{r}}\right)^{\frac{x}{r}}\right]^r \\
&\qquad\qquad x\to\infty \Leftrightarrow \frac{x}{r}\to\infty \\
&= \left[\lim_{\frac{x}{r}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{r}}\right)^{\frac{x}{r}}\right]^r \\
&\qquad\qquad \text{Substitutie: } y=\frac{x}{r} \\
&= \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^r \\
&\qquad\qquad \text{definitie getal } e \\
&= e^r
\end{aligned}
$$

Voorbeelden

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^x = e^{\sqrt{2}}$

Zoals wordt aangegeven door het volgende overzicht blijven de klassieke rekenregels geldig.

Overzicht

Veronderstel dat $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^x \cdot e^y = e^{x+y} \\[2em] \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \\[2em] (e^x)^y = e^{xy} \\[2em] e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \\[2em] e^0 = 1 \end{array}}$$

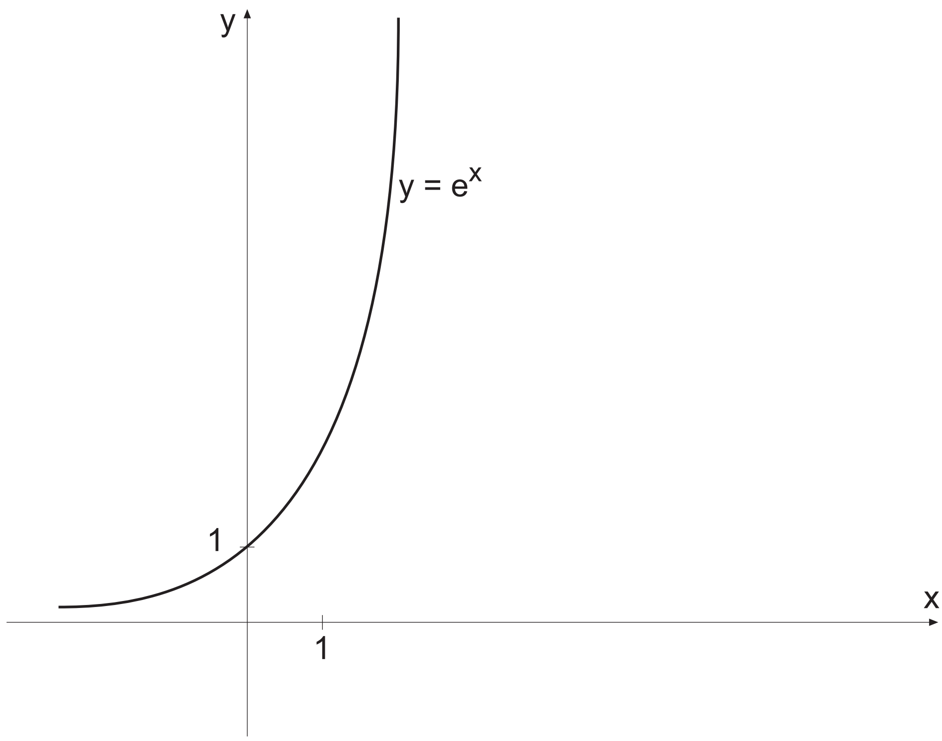
14.2 De natuurlijke exponentiële functie

De exponentiële functie $f(x) = a^x$ waarbij het grondtal a gelijk wordt genomen aan het getal e noemen we **de natuurlijke exponentiële functie**.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$$

Ook nu is **dom** $\boldsymbol{f = \mathbb{R}}$ en **bld** $\boldsymbol{f = \mathbb{R}_0^+}$ en is de functie **stijgend** $(e > 1)$.
In de literatuur wordt soms ook $\exp(x)$ als notatie voor e^x gebruikt.
Enkele koppels:

x	-2	-1	0	1	2
e^x	$e^{-2} \approx 0.1$	$e^{-1} \approx 0.4$	1	$e \approx 2.7$	$e^2 \approx 7.4$



Gebruik een **GRT** om de grafiek van de natuurlijke exponentiële functie te plotten. Kies bijvoorbeeld voor $y \in [0, 8]$ en een orthonormaal assenstelsel (5:ZSquare). Bemerk dat

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\[2em] \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{array}}$$

14.3 De natuurlijke logaritmische functie

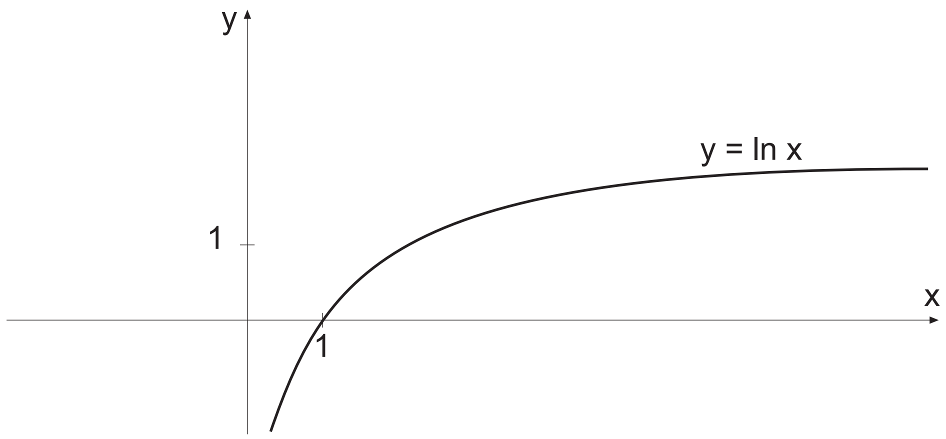
De logaritmische functie $f(x) = \log_a x$ waarbij het grondtal a gelijk wordt genomen aan het getal e noemen we **de natuurlijke logaritmische functie** en noteren we als $f(x) = \ln x$.

$$f : I\!R \to I\!R : x \mapsto \ln x$$

Ook nu is **dom** $\boldsymbol{f = I\!R_0^+}$ en **bld** $\boldsymbol{f = I\!R}$.

Enkele koppels:

x	$e^{-2} \approx 0.1$	$e^{-1} \approx 0.4$	1	$e \approx 2.7$	$e^2 \approx 7.4$
$\ln x$	-2	-1	0	1	2



Gebruik een **GRT** om de grafiek van de natuurlijke logaritmische functie te plotten. Kies bijvoorbeeld voor $x \in [0, 8]$ en een orthonormaal assenstelsel (5:ZSquare). Bemerk dat

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{array}}$$

Vanzelfsprekend is de natuurlijke logaritmische functie de inverse functie van de natuurlijke exponentiële functie. De grafiek van $y = \ln x$ is dan ook het spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice van de grafiek van $y = e^x$.

Omdat de natuurlijke logaritme een speciaal geval is van de logaritme met grondtal a, blijven de klassieke rekenregels en eigenschappen geldig zoals door het volgende overzicht wordt aangegeven.

Overzicht

$\ln x$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$	
ln is een stijgende functie	
$\ln 1 = 0$	
$\ln e = 1$	
$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	$(x \in \mathbb{R}_0^+)$
$e^{\ln x} = x$	$(x \in \mathbb{R}_0^+)$
$\ln e^x = x$	$(x \in \mathbb{R})$
$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$	$(x, y \in \mathbb{R}_0^+)$
$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$	$(x, y \in \mathbb{R}_0^+)$
$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$	$(x \in \mathbb{R}_0^+)$
$\ln x^r = r \ln x$	$(x \in \mathbb{R}_0^+, r \in \mathbb{R})$
$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{\log x}{\log a}$	$(x \in \mathbb{R}_0^+, a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$
$a^x = e^{x \ln a}$	$(x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_0^+)$

Er zijn geen eenvoudige formules voor $\ln(x+y)$ en $\ln(x-y)$.

De voorlaatste formule is handig om $\log_a x$ te berekenen met behulp van een rekentoestel.

De natuurlijke logaritme van x noemt men ook de Neperiaanse logaritme van x.

14.4 Opdrachten

1. Ga na dat de volgende gelijkheden (met $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$) juist zijn.

   a) $\ln x - 2 = \ln\left(\dfrac{x}{e^2}\right)$

   b) $\ln x - \ln y + \ln z = \ln\left(\dfrac{xz}{y}\right)$

   c) $3 + 2\ln x = \ln(e^3 x^2)$

   d) $\dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - \ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$

2. Vereenvoudig:

a) $e^{\ln x} - \ln e^x$	d) $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$	g) $\ln\sqrt{e}$
b) $\ln[x^4 e^{-x}]$	e) $\ln e^{10}$	h) $e^{\ln x^2}$
c) $e^{\ln x^2 - 2\ln y}$	f) $e^{-\ln x}$	i) $e^{3\ln 2}$

3. Schets de grafiek van $f(x) = e^{-x}$ (manueel of **GRT**).

   Vul in:

   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} =$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} =$

4. Vul in: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} = ...$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} = ...$

   Gebruik een **GRT** om de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ te plotten (met bijvoorbeeld $x \in [-3, 3]$ en 0:ZoomFit).

   U ziet een voorbeeld van een Gausscurve. Verfieer de berekende limieten.

5. Gegeven is de volgende functie:

$$N : I\!R^+ \to I\!R : t \mapsto \frac{1000}{1 + 999e^{-t}}$$

   Bereken t_0 zodat $N(t_0) = 500$.

   Los de gebruikte vergelijking op zowel manueel als met een **GRT** (optie 'Solver').

6. Gegeven is $y = f(x) = \dfrac{1000}{1 + 999e^{-k.1000.x}} (k \in I\!R)$

   Bovendien is gegeven dat $\left(\dfrac{1}{10}, 20\right) \in f$.

   Bereken k (antwoord op 4 decimalen).

   Los de gebruikte vergelijking op zowel manueel als met een **GRT** (optie 'Solver').

7. Veronderstel dat $V(t) = 20 - 20e^{-kt}(k \in \mathbb{R})$.

   Bovendien is gegeven dat $V(2) = 4$.

   Bereken $V(10)$.

   Los de vergelijking om k te berekenen zowel manueel op als met een **GRT** (optie 'Solver').

8. Veronderstel dat $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ $(Q_0, k \in \mathbb{R})$.

   Bovendien is gegeven dat $Q(5568) = \dfrac{Q_0}{2}$.

   Bereken t_1 zodat $Q(t_1) = 0,1Q_0$.

9. Bereken de volgende limieten steunend op $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{x}\right)^x = e^r$. Veronderstel dat $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{xb}$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x+1}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$

10. Gegeven $y = a \cdot b^{cx}$ (met $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ en $b \neq 1$, $c \neq 0$).

    Ga na dat $\ln y$ een eerstegraadsfunctie is in x.

Oplossingen

1.6. 1. -1; $\frac{y}{x-y}$; $\frac{1}{a-b}$; $\frac{a-b}{a+b}$; 4; $-\frac{a^4+a^2+1}{a^2+1}$; $\frac{4(5-x)}{5}$

2. a) $\frac{1}{x-y}$ b) $\frac{6x+2}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

c) $\frac{2}{1-a^2}$ d) $\frac{6a^2+2}{a^4-1}$

e) 3 f) $\frac{a^n+b^n}{a^m+b^m}$

g) $\frac{a-b}{a+b}$ h) $\frac{1}{b}$

i) ab j) 1

k) $\frac{a}{b}$ l) $\frac{a(a^2-2a+3)}{a^2+1}$

m) $-6a^2$ n) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$

3. a) $8x^3-48x^2+96x-64$
   b) $-x^3-8x^2-21x-12$
   c) $1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3$

4. $Q(x)=3x^3-2x^2+4x-13;\ R(x)=18$
   $Q(x)=x^2+x-6;\ R(x)=0$
   $Q(a)=3a^4-6a^3+5a^2-a-8;\ R=36$

$Q(x) = x^6 + 3yx^5 + 9y^2x^4 + 27y^3x^3 + 72y^4x^2 + 216y^5x + 650y^6$; $R = 1946y^7$
$Q(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{17}{8}$; $R = \frac{31}{8}$

5. $p = -3$

   $p = 1$

6. $a = 4$ en $b = 2$

   $a = 4$ en $b = 11$

7. a) $x^2(x-4)$
   b) $-(x+y)(2a+7)$
   c) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
   d) $(x-y-2)(x+y+2)$
   e) $(4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2)$
   f) $(x^4+4)^2$
   g) $2(5a+2b^2)^3$
   h) $(3a-ax+1)(3a+ax-1)$
   i) $(x+1)(x^4+x^2+1)$
   j) $(x-1)(4x+1)$
   k) $-(x-7)(x+2)$
   l) $(x+3)(x-8)(x+5)$

2.3. 1.

a) 28	e) 30
b) 17	f) 38
c) -2	g) 12
d) 56	

2. a) $\frac{91}{3}$ b) 26

3. De bewering is niet waar.

4. a) $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$

b) nb

c) $-3a + Y_1 + Y_2 + Y_3$

d) $-a + Y_1 + Y_2 + Y_3$

e) $\frac{137}{60}$

f) $\frac{52}{5}$

5.

30	35
96	1
5040	8
90	n
$\frac{1}{140}$	10
3 628 800	125

6.

$\frac{1}{n+1}$	$(2n+1)$	$(3n+1)(3n+2)(3n+3)$
$\frac{1}{(2n)(2n+1)}$	$(2n+1)(2n+2)$	$\frac{1}{3n}$
$\frac{2}{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$	$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$	$[(n-1)!]^2$

3.5. 1. a) -60 b) $\frac{25}{7}$ c) $\frac{3}{5}$ d) vals

2.

a) 2 b) $\frac{3(a+b)}{2}; \frac{3(a-b)}{2}$

c) 4 d) 3a ; $-a$

e) 3; 0 f) $\pm 1; \pm 3$

g) $\pm a; \pm\frac{1}{a}$ h) $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

3. a) 5

b) 361

4.5. 1. a) $x = 1$, $y = 2$

b) $x = a + b$, $y = a - b$

c) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{3}{4}$

d) $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$

2. a) $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$

b) $x = 3$, $y = 5$, $z = 8$

5.3 1. a) $\mathbb{R} \backslash \{8\}$

b) $\frac{-3}{2}$

2. a) $\mathbb{R}$

b) 0

3. a) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = (x-1)^3$

b) -1

c) 1

6.5. 1. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; $(0,0)$; geen snijpunt met X-as.

2. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; $(-2, 2)$

3. a)
$$\begin{array}{c|ccc} x & & \frac{7}{5} & \\ \hline y & + & 0 & - \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c|ccc} x & & 0 & \\ \hline y & - & 0 & + \end{array}$$

c) 1e geval : $m > 0$
$$\begin{array}{c|ccc} x & & \frac{-n}{m} & \\ \hline y & - & 0 & + \end{array}$$

2e geval : $m < 0$
$$\begin{array}{c|ccc} x & & \frac{-n}{m} & \\ \hline y & + & 0 & - \end{array}$$

4. a) $p = 2$

maximale functiewaarde is -4

b) $p = -1$

5. b) $\left(\frac{7-\sqrt{33}}{4}, \frac{17-3\sqrt{33}}{4}\right)$ en $\left(\frac{7+\sqrt{33}}{4}, \frac{17+3\sqrt{33}}{4}\right)$

6. $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 1-\sqrt{3}\right)$ en $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1+\sqrt{3}\right)$

7. a) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ en $(1,0)$

b) $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, 0\right)$ en $\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$

c) $(0,0)$ en $(-4,0)$

d) geen snijpunt met x-as

e) $(0,0)$

f) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

8. a)
$$\begin{array}{c|ccccc} x & & \frac{3-\sqrt{5}}{2} & & \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \\ \hline y & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c|ccccc} t & & -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ \hline y & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{c|c} x & \\ \hline y & + \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{c|ccc} q & & -\frac{1}{3} & \\ \hline p & + & 0 & + \end{array}$$

9. $(1,1)$ en $(-1,-1)$

10. $(0,-1)$

7.4.

1. $a: y = -3x - 5$ $a: y = x + 1$

   $b: y = 2x + 6$ $b: y = -3x$

   $c: y = 4$ $c: y = 3x - 9$

   $d: y = x$ $d: x = 2$

   $e: y = -2x - 13$ $e: y = -\frac{3}{2}x + 6$

   $f: y = \frac{5}{2}x - \frac{31}{2}$ $f: y = \frac{6}{5}x + \frac{1}{15}$

3. $y = -4x$

6. a) -1 b) geen   c) 0

8.4.

1) $x < \frac{55}{73}$

2) $x < \frac{2}{5}$ of $x > 2$

3) $x \leq -2$ of $2 \leq x \leq 3$

4) $1 \leq x \leq 3$

5) $3 \leq x \leq 4$

6) $x < -3$ of $-2 < x < \frac{1}{2}$

7) $-1 < x < 4$ of $4 < x$

8) $x < 1 - \sqrt{6}$ of $x > 1 + \sqrt{6}$

9) $x < -1$ of $x > 0$

10) $1 < x < 3$ of $x > 3$ of $x < -1$

9.3.

1) $3 < x < 5$

2) $-7 < x < 3$

3) $x \leq -\frac{9}{10}$ of $x \geq -\frac{1}{10}$

4) $-1 < x < 5$

5) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

6) $x < 1$ of $x > 5$

7) $-3 < x < 1$

8) $x < \frac{3\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}$ of $x > \frac{3\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}}$

10.7. 1) 4; $\frac{1}{4}$; $-2\sqrt[3]{12}$; -1;

$\frac{64}{125}$; 288; $-\frac{2c^3\sqrt[5]{8}}{a^7}$

$\sqrt{a}$; $a^2\sqrt[3n]{ab}$; $\frac{1}{b^2c\sqrt[5]{a^3c^2}\sqrt[10]{b^3}}$

2)

1.	5	6.	$\frac{1}{3}$	11.	$\frac{2}{3}$	16.	1
2.	-6	7.	$-\frac{3}{5}$	12.	$-\frac{1}{2}$	17.	2
3.	$-\frac{1}{3}$	8.	1	13.	$\frac{7}{4}$	18.	2
4.	$\frac{1}{2}$	9.	-6	14.	$-\frac{1}{2}$		
5.	$\frac{3}{2}$	10.	-1	15.	8		

3)

1. $\frac{1}{5}$ 3. $\sqrt{8}$ 5. 2

2. $\sqrt[4]{2}$ 4. $\frac{1}{1000}$ 6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. 1) $x = 3$ of $x = -\frac{1}{2}$

2) $x = \frac{\log 0,0719}{\log 0,86} \approx 17,454$

3) $x = \frac{3}{2}$

4) $x = 0$ of $x = \frac{\log 2}{\log 5} - 1 \approx -0,569$

5) $x = 4$ of $x = \frac{1}{4}$

6) $x = 3$

11.4. 2. 1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ $\tan\ \alpha = \frac{12}{5}$

2) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ $\tan\ \alpha = -\frac{4}{3}$

3) $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$

4. $-1 - \sqrt{3}$

12.5.

1.	$-\dfrac{1}{2}$	13.	$\dfrac{1}{2}/-\dfrac{1}{2}$
2.	2	14.	$0/2$
3.	$\dfrac{1}{4}$	15.	-2
4.	6	16.	$\dfrac{1}{2}$
5.	0	17.	$\dfrac{2}{\pi}$
6.	$-\dfrac{1}{2}$	18.	$+\infty/-\infty$
7.	$-\infty/+\infty$	19.	$-\infty$
8.	$+\infty$	20.	$-\infty/+\infty$
9.	$+\infty$	21.	0
10.	2	22.	$+\infty$
11.	$+\infty/-\infty$	23.	$+\infty$
12.	1	24.	$-\infty$

13.3.

1.	$x = -1$	$y = x - 1$	
2.	$y = 1$	$y = -1$	
3.	$x = 1$	$x = 4$	$y = 2$
4.	$x = -3$	$y = 0$	
5.	$x = 0$	$x = -3$	$y = 0$
6.	$y = x + 1$	$y = -x - 1$	
7.	$x = 0$	$y = x$	
8.	$x = 1$	$y = 2x$	

9. V.A. : $x = 0$ voor $x \underset{>}{\rightarrow} 0$

   H.A. : $y = 0$ voor $x \rightarrow +\infty$

10. V.A. : $x = 0$ voor $x \underset{>}{\rightarrow} 0$

    H.A. : $y = 1$ voor $x \rightarrow \pm\infty$

11. geen asymptoten

12. V.A. : $x = 3$

    H.A. : $y = 0$ voor $x \rightarrow -\infty$

    S.A. : $y = 2x + 4$ voor $x \rightarrow +\infty$

14.4 2. a) 0

b) $4 \ln x - x$

c) $\dfrac{x^2}{y^2}$

d) $-\dfrac{1}{2}$

e) 10

f) $\frac{1}{x}$

g) $\frac{1}{2}$

h) x^2

i) 8

3. $0/+\infty$

4. $0/0$

5. $\ln 999 \approx 6.9$

6. $\frac{1}{100}\ln\frac{999}{49} \approx 0.0301$

7. $V(10) \approx 13,45$

8. $k \approx -0,000\ 124$ $\qquad$ $t_1 \approx 18\ 500$

9. a) e^a

   b) e^{ab}

   c) $\frac{1}{e}$

   d) e^{ab}

10. $\ln y = \ln a + (c \ln b)x$

Appendix: TI-84 Plus: een kennismaking

DEL-toets : teken onder cursor verwijderen
CLEAR-toets : invoerregel wordt gewist; indien cursor op lege regel : alles op zichtbare gedeelte van het basisscherm wordt leeg gemaakt
[2nd][quit] : menu verlaten (zonder een keuze te maken)
[2nd][ans] : om laatste antwoord terug te roepen (om bv te gebruiken in volgende berekening)
[2nd][entry] : om laatste invoerregel terug te roepen (om bv iets te corrigeren)
[2nd][entry][2nd][entry] : om voorlaatste invoerregel terug te roepen, enz...
terug zetten op fabrieksinstellingen : [2nd][mem] / kies 7: reset / enter / kies 2: defaults / enter / kies 2: reset /enter
'kiezen' : ofwel keuze maken met pijltjestoetsen en dan enter, ofwel gepaste cijfer of letter tikken, dus zonder enter

Zoek de waarde van $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ voor $x = 0.5$, vervolgens voor $x = 0.25$

tik .5 / [sto] / [X,T,θ,n] / enter
nu is de waarde 0.5 opgeslagen in de variabele X
tik de veelterm *(geen vermenigv.-teken nodig, voor x gebruik je toets* [X,T,θ,n]) / enter   *Antwoord* : 7.5
[2nd][entry][2nd][entry] / vervang .5 door .25 / enter / [2nd][entry][2nd][entry] / enter
Antwoord : 7.218 75

Zoek de oplossingen van de vergelijking $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$

[math] / kies 0: solver / ga naar eerste regel / tik de veelterm / enter

[alpha][solve] je ziet $X = -0.499\,999\ldots$ *als geen schatting (startwaarde) werd ingevoerd wordt de oplossing het dichtst bij* 0 *gegeven*

geef nieuwe schatting in na $X =$ ... bv 1 [alpha][solve] je ziet $X = 2.000\,000\ldots$

geef nieuwe schatting in bv 4 [alpha] [solve] je ziet $X = 2.999\,999\ldots$

De oplossingen zijn $x_1 = -0,5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$

Een antwoord (berekende oplossing) naar basisscherm overbrengen :

[2nd][quit] / [2nd][rcl] / X / enter

Maak een grafiek van de functie $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

De toetsen op de eerste rij bovenaan zijn nu belangrijk.

[Y=] / tik $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ (na bv $Y_1 =$)

[window] / tik -1 bij $Xmin =$ / tik 3.5 bij $Xmax =$

[zoom] / kies 0: ZoomFit / [graph] (indien nodig)

De keuze ZoomFit laat toe het gebied voor x te kiezen. De grafiek wordt dan aangepast aan de maximale en minimale y-waarde in dat gebied.

Bij de keuze 6: ZStandaard is $x \in [-10, 10]$ *en* $y \in [-10, 10]$.

Als je in [window] $Xmin =, Xmax =, Ymin =, Ymax =$ *invult, dan kan je [zoom] overslaan, dus onmiddellijk [graph].*

[trace] : om *op* de grafiek de cursor te verplaatsen (uitzetten : [clear])

Grafiek van de functie $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ onderzoeken (numerieke benadering)

Functiewaarde berekenen : [2nd][calc] / kies 1: value / tik x-waarde / enter
Nulpunt zoeken (bij tekenverandering) : [2nd][calc] / kies 2: zero
linkergrens van gebied rond (bv kleinste) nulpunt aangeven : met cursor in buurt van nulpunt zo dat y-waarde is neg. / enter
analoog zo dat y-waarde is pos. / enter
guess ? (startwaarde, niet noodzakelijk invullen) / enter resultaat : nulpunt -0.5
analoog voor de twee andere nulpunten
Lokaal maximum/minimum zoeken : analoog

Creëer een tabel met functiewaarden voor $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ met $x \in [-2, \ldots]$ en stapgrootte 0.1

[Y=] / tik $2x^3-9x^2+7x+6$ (na bv Y_1 =) / [2nd][tblset] / tik -2 / tik .1 / [2nd][table]
Als je na [2nd][tblset] *kiest voor* Indpnt (independent) : Ask *(i.p.v. Auto) kan je in* [2nd][table] *zelf geschikte x-waarden ingeven.*

Zoek de vergelijking van de rechte door $(3, 5)$ en $(4, 7)$ en teken deze rechte

[stat] / kies 1: edit / tik in L_1-kolom de x-waarden 3 en 4 / tik in de L_2-kolom de y-waarden 5 en 7
[stat] / ga nr CALC / kies 4: LinReg(ax+b) / [2nd]L_1,[2nd]L_2 / enter *Antw :* $y = 2x - 1$
[Y=] / [vars] / kies 5: statistics / ga naar EQ / kies 1: RegEQ / zie uitleg maken grafiek

Stelsel van lineaire vergelijkingen oplossen

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

Mogelijkheid 1

tik [[1,2,3][4,5,6]] / enter   je ziet de uitgebreide matrix van het stelsel

[2nd][matrix] / ga naar MATH / kies B: rref(je ziet rref(op basisscherm

[2nd][ans] / enter   je ziet de canonieke trapvorm van de matrix

het stelsel is nu : $\begin{cases} 1x + 0y = -1 \\ 0x + 1y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Mogelijkheid 2

[2nd][matrix] / ga naar EDIT / kies (bv) 1: [A]

vul in : 2 enter / 3 enter / 1 enter / 2 enter / 3 enter / 4 enter / 5 enter / 6 enter

[2nd][quit] nu is de matrix A gedefinieerd

[2nd][matrix] / ga naar MATH / kies B: rref(je ziet rref(op basisscherm

[2nd][matrix] / kies 1: [A] 2x3 / enter

Enkele tips

waarde /[sto] / tik letter of [X,T,θ,n] / enter : slaat die waarde op in de gekozen variabele (letter of [X,T,θ,n])

[2nd][rcl] / tik letter of [X,T,θ,n] / enter : roept de huidige waarde vd variabele terug

Met [trace] kan je de grafiek ook 'buiten het zichtbare venster' volgen

In [$Y =$] bv $Y_3 = x^2 - 1$ wel gedefinieerd laten, maar niet in de grafiek : cursor op =-teken / enter (aan/uit principe)

Faculteit : bv 5!   tik 5 / [math] / ga naar PRB / kies 4: ! / enter