

Bijlage 1: Matrices

Inhoudsopgave

1	Matrices	2
1.1	Definities en begrippen	2
1.1.1	Oefeningen	4
1.2	Bewerkingen met matrices	9
1.2.1	Optelling	9
1.2.2	Scalaire vermenigvuldiging	11
1.2.3	Vermenigvuldiging van twee matrices	13
1.2.4	Macht van een matrix	15
1.2.5	Oefeningen	16

1 Matrices

1.1 Definities en begrippen

Een rechthoekig rooster, zoals hieronder is voorgesteld, wordt een **matrix** genoemd. Hierbij zijn $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ reële getallen. Deze getallen worden ook de **elementen** van de matrix A genoemd. Het element a_{ij} staat op de i^{de} rij en j^{de} kolom.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bovenstaande matrix met m rijen en n kolommen wordt ook een matrix met **dimensies** $m \times n$ (**dim** $A = m \times n$) genoemd of kortweg een **$m \times n$ -matrix** genoemd. De verzameling van alle matrices met dimensies $m \times n$ wordt genoteerd als $\mathbb{R}^{m \times n}$.

In onderstaande tabel wordt een overzicht gegeven van een aantal speciale matrices, gebruik makende van de notatie van matrix A .

Soort matrix	Omschrijving	Matrixvorm
Getransponeerde matrix	Een getransponeerde matrix van een matrix A , genoteerd A^T , is de matrix die ontstaat door de kolommen en rijen onderling van plaats te verwisselen, met behoud van de volgorde.	$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ji} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
Tegengestelde matrix	Een tegengestelde matrix van een matrix A , genoteerd $-A$, is een matrix waarbij alle elementen het tegengestelde zijn van de overeenkomstige elementen in A .	$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$
Nulmatrix	Een nulmatrix, genoteerd O , is een matrix waarbij alle elementen gelijk zijn aan 0.	$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
Rijmatrix	Een rijmatrix is een matrix die slechts één rij heeft	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$

Soort matrix	Omschrijving	Matrixvorm
Kolommatrix	Een kolommatrix is een matrix die slechts één kolom heeft	$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$
Vierkante matrix	Een vierkante matrix is een matrix met evenveel rijen als kolommen.	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
Diagonaalmatrix	Een diagonaalmatrix is een vierkante matrix waarbij de elementen die niet op de hoofddiagonaal liggen gelijk zijn aan 0.	$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
Symmetrische matrix	Een symmetrische matrix is een vierkante matrix waarbij de elementen die symmetrisch liggen ten opzichte van de hoofddiagonaal gelijk zijn aan elkaar.	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
Eenheidsmatrix	Een eenheidsmatrix is een diagonaalmatrix waarbij de elementen op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 1. Deze matrix wordt ook genoteerd door I_n	$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$
Benedendriehoeksmatrix	Een benedendriehoeksmatrix is een vierkante matrix waarbij de elementen boven de hoofddiagonaal allemaal 0 zijn.	$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
Bovendriehoeksmatrix	Een bovendriehoeksmatrix is een vierkante matrix waarbij de elementen onder de hoofddiagonaal allemaal 0 zijn.	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Tabel 1: Overzicht speciale matrices.

1.1.1 Oefeningen

Oefening 1

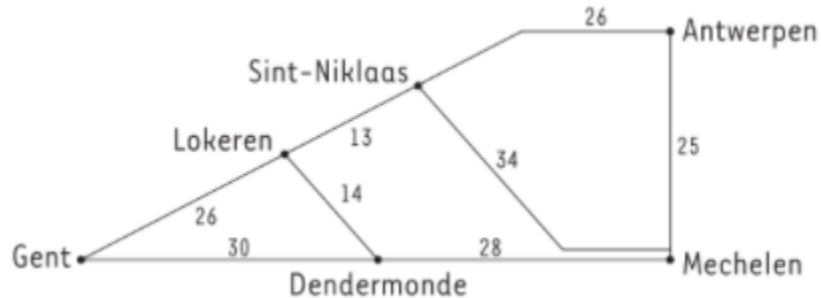
Bij een gezelschap van 6 personen (aangeduid door A, B, C, D, E en F) wordt er een voorzitter gekozen. Iedereen moet zijn voorkeur bekend maken door middel van een cijfer: het cijfer 1 wordt gegeven aan de eerste voorkeur, 2 aan de tweede voorkeur, etc. Men mag niet voor zichzelf stemmen of meerdere keren op dezelfde persoon stemmen. De persoon met de laagste totaalscore wordt de voorzitter. In de matrix V worden de resultaten van de stemming voorgesteld.

Wie wordt voorzitter op basis van de resultaten. Leg uit!

$$V = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oefening 2

Matrices kunnen ook gebruikt worden om netwerken op een compacte manier wiskundig voor te stellen. In Figuur 1 wordt het IC-spoornetwerk afgebeeld tussen zes Belgische steden. Hierbij wordt ook de kortste afstand tussen 2 steden vermeld (in km).



Figuur 1: IC-spoornetwerk van zes Belgische steden

1. In Figuur 1 zijn echter niet alle mogelijke verbindingen weergegeven. Wat is de kortste manier om je te verplaatsen
 - (a) van Lokeren naar Mechelen?
 - (b) van Gent naar Antwerpen?
2. De kortste afstanden tussen de zes steden via het IC-spoornetwerk kunnen overzichtelijk genoteerd worden met een matrix. We gebruiken hierbij de rijen om het vertrekpunt en de kolommen om de bestemming aan te duiden. Vul de matrix B in door voor iedere element de kortste onderlinge afstand tussen de twee overeenkomstige steden te noteren. Let erop dat de volgorde van de steden identiek is voor de rijen en kolommen!!

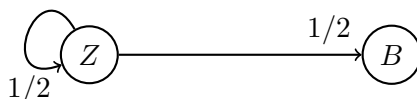
$$B = \begin{matrix} & & & \text{Naar} & & & \\ & A & D & L & G & M & S \\ \begin{matrix} A \\ D \\ G \\ L \\ M \\ S \end{matrix} & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3. Wat is de dimensie van de matrix B ?
4. Wat is element b_{12} , b_{36} en b_{54} ?
5. Wat voor een soort matrix is B ? Wees zo specifiek mogelijk (Tip: Zie Tabel 1 Hoe kun je dit verklaren?)

Oefening 3

In een bepaalde regio kunnen we het weer onderverdelen in 3 categorieën: zonnig (Z), bewolkt (B) of regenachtig (R). Je mag ervan uitgaan dat het weer op een bepaalde dag afhangt van het weer op de vorige dag. Zo mag je uitgaan van het volgende:

- Indien het weer de vorige dag zonnig was, dan is er een even grote kans dat het vandaag zonnig of bewolkt is. Regen is echter niet mogelijk vandaag.
 - Indien het weer de vorige dag regenachtig was, dan is er een even grote kans dat het vandaag opnieuw regenachtig of bewolkt is. Een zonnige dag is vandaag helaas onmogelijk.
 - Indien het weer de vorige dag bewolkt was, dan is er vandaag 50% kans dat het zonnig is, 25% dat het opnieuw bewolkt is en 25% kans dat het vandaag regenachtig is.
1. Deze overgangen kunnen schematisch voorgesteld worden in een **pijlenschema** of **graaf**. Voor deze oefening werd in onderstaande figuur reeds een aanzet gegeven. Vervolledig nu het pijlenschema bij deze oefening. (Hint: De pijl geeft aan dat je gaat van het weer van de vorige dag naar het weer van vandaag. Vervolgens schrijf je bij deze pijl de kans waarmee het weer verandert of hetzelfde blijft.)



2. Vul de kansen die je hebt gebruikt in het pijlenschema in in de matrix W . Een matrix die dergelijke overgangen weergeeft tijdens een bepaalde periode wordt ook een **overgangsmatrix** of **migratiematrix** genoemd. Gebruik voor de rijen om het weer van de vorige dag en de kolommen om het weer van vandaag aan te duiden. Let op dat je consistent bent in de volgorde van de rijen en kolommen!

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Naar} \\ Z & B & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Van} \\ Z \\ B \\ R \end{matrix} & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3. Wat merk je als je de kansen in elke rij optelt? Hoe kun je dit verklaren? Geldt dit ook voor de kolommen?
4. Wat voor een soort matrix is dit? Wees zo specifiek mogelijk (Tip: Zie Tabel 1)

Oefening 4

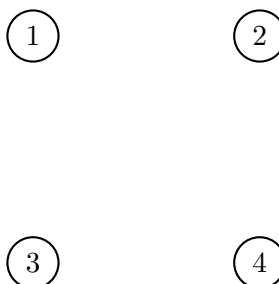
Wanneer een persoon ziek wordt zijn er verschillende stadia waarin die persoon zich kan bevinden. Hierbij kan er een vereenvoudigd ziektemodel opgesteld worden, waarbij we ons focussen op de volgende vier stadia:

- Stadium 1: De persoon is gezond.
- Stadium 2: De persoon is ziek.
- Stadium 3: De persoon is gestorven aan de ziekte.
- Stadium 4: De persoon is gestorven door een andere reden dan de ziekte.

De kansen waarmee een persoon wisselt tussen de verschillende stadia na een bepaald tijdsinterval wordt gegeven door onderstaande matrix Z . De rijen verwijzen naar het stadium aan het begin van het tijdsinterval en de kolommen wijzen naar het stadium op het einde van het tijdsinterval. Los de bijbehorende opdrachten op.

$$Z = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{Naar} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Van} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/3 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Stel matrix Z schematisch voor met een pijlschema.



2. Een persoon die gezond is aan het begin van het tijdsinterval kan niet sterven aan de ziekte op het einde van het tijdsinterval. Hoe wordt dit vertaald in de matrix Z ?
3. Wat is de betekenis van het element z_{12} ?
4. Waarom zijn de elementen z_{33} en z_{44} gelijk aan 1?

1.2 Bewerkingen met matrices

In dit hoofdstuk gaan we kijken hoe we eenvoudige bewerkingen met deze matrices kunnen uitvoeren. Hierbij gebruiken we de volgende matrices ter illustratie:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 6 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ en } B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & -4 \\ -7 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

1.2.1 Optelling

Definitie: De som van twee matrices A en B is een matrix C met dezelfde dimensies als die van A en B , waarbij de elementen van C gelijk zijn aan de som van de overeenkomstige elementen van A en B .

In symbolen: Als $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan is $C = A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, waarbij $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ voor elke rij i en kolom j .

Opmerking 1: De matrices in de optelling moeten dezelfde dimensies hebben!

Opmerking 2: Het verschil van 2 matrices kunnen we als volgt definiëren:
Indien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan $A - B = A + (-B)$.

Voorbeeld: Hieronder kunnen jullie een voorbeeld terugvinden waarbij de matrices A en B worden opgeteld. Welke bewerkingen worden uitgevoerd voor de getallen die zijn aangeduid in het rood, groen en blauw? Is dit een geldige optelling? Waarom?

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 6 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & -4 \\ -7 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 8 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 14 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oefening 5

Bereken $A + B$, indien

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} -9 & -1 & -6 & 0 \\ -1 & -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 9 \\ 3 & -9 & 3 \\ 9 & -8 & -5 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 4 \\ -6 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

1.2.2 Scalaire vermenigvuldiging

Definitie: Het product van een reëel getal k en een matrix A is een matrix D , waarbij elk element van D gelijk is aan het product van het overeenkomstig element uit A en het reëel getal k .

In symbolen: Als $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $k \in \mathbb{R}$, dan is $D = k \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, waarbij $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$ voor elke rij i en kolom j .

Voorbeeld: Hieronder kunnen jullie een voorbeeld terugvinden waarbij de matrix A wordt vermenigvuldigd met het scalaire getal $k = 3$. Welke bewerking wordt uitgevoerd voor de getallen die zijn aangeduid in het rood? Is dit een geldige vermenigvuldiging? Waarom?

$$D = k \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 6 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -15 \\ 9 & 15 & 21 \\ 24 & -6 & 18 \\ 27 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

Oefening 6

Bereken $k \cdot A$, indien

1. $k = 4$ en $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

2. $k = -5$ en $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & 0 \\ 9 & -7 & 6 \end{bmatrix}$

1.2.3 Vermenigvuldiging van twee matrices

Definitie: Indien A een $m \times n$ -matrix is en B een $n \times p$ -matrix, dan is de productmatrix $E = A \cdot B$ een $m \times p$ -matrix. Elk element e_{ij} in de matrix E komt hierbij overeen met de som van de producten van de elementen in de i^{de} rij in matrix A en de overeenkomstige elementen in de j^{de} kolom van matrix B .

In symbolen: Als $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, dan is $E = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times p}$, waarbij $e_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$ voor elke rij i en kolom j .

Opmerking: Let erop dat het aantal kolommen van de linkermatrix gelijk is aan het aantal rijen van de rechtermatrix in de vermenigvuldiging. Indien deze dimensies niet overeenkomen kun je de matrixvermenigvuldiging **niet** uitvoeren!!

Voorbeeld: Hieronder kunnen jullie een voorbeeld terugvinden waarbij de matrix A wordt vermenigvuldigd met de matrix B^T . Welke bewerking wordt uitgevoerd voor de getallen die zijn aangeduid in het rood? Is dit een geldige vermenigvuldiging? Waarom?

$$E = A \cdot B^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 6 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 2 & -6 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 & 5 \\ 20 & -22 & 3 & -36 \\ 20 & 46 & -48 & 34 \\ 48 & 12 & -47 & 6 \end{bmatrix}$$

Waarom mag de matrixvermenigvuldiging $A \cdot B$ niet met de matrices A en B in bovenstaand voorbeeld?

Welke dimensies heeft de resulterende matrix bij de vermenigvuldiging $B^T \cdot A$?

Oefening 7

Bereken $A \cdot B$, indien

$$1. \ A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 9 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \text{ en } B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. \ A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 9 \\ -7 & -8 & 6 \end{bmatrix} \text{ en } B = \begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 7 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

1.2.4 Macht van een matrix

Definitie: Indien A een vierkante matrix is en $n \in \mathbb{N}_0$, dan kan A^n gedefinieerd worden als een product waarbij de matrix A n keer als factor voorkomt.

In symbolen: Als $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ en $n \in \mathbb{N}_0$, dan is $A^n \in \mathbb{R}^{m \times m}$, met $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot 1$ (n factoren).

Kun je ook een macht berekenen van een niet-vierkante matrix? Waarom (niet)? Zijn de elementen van de matrix A^n **altijd** gelijk aan a_{ij}^n ? Leg uit waarom (niet) aan de hand van een (tegen)voorbeeld.

Oefening 8

Bereken A^2 en A^3 indien $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

1.2.5 Oefeningen

De oefeningen op de vorige bladzijden hebben jullie met de hand opgelost. Natuurlijk is het ook interessant om te bekijken hoe jullie deze oefeningen met jullie grafisch rekenmachine kunnen oplossen. Via de YouTube-link <https://www.youtube.com/watch?v=UGccb18KLG0> kunnen jullie een instructievideo bekijken waarbij de vorige onderwerpen stap voor stap worden uitgelegd op een TI-84 Plus grafisch rekenmachine. Hieronder wordt een overzicht gegeven van tijdstempel van de onderwerpen die jullie moeten bekijken. Vervolgens kunnen jullie deze stappen uittesten op de oefeningen die jullie op de vorige pagina's reeds hebben uitgevoerd ter controle.

- Ingeven matrix in grafisch rekenmachine: 0:13 - 1:43
- Scalaire vermenigvuldiging: 1:43 - 2:05
- Matrix opslaan: 2:05 - 2:40
- Macht van een matrix: 2:40 - 3:00
- Optellen van matrices: 3:00 - 3:25
- Matrixvermenigvuldiging: 3:25 - 4:00

De rest van de video hoeven jullie voor dit project nog niet te bekijken.

Indien jullie nog extra oefeningen willen maken in verband met deze basisopdrachten kunnen jullie deze maken via de website https://wiskunde-interactief.be/oef_7matrices_bewerkingen.htm

Oefening 9

Bereken $\frac{1}{3}(2A - 5B) - \frac{2}{3}(4A - B)$, indien je weet dat $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Oefening 10

Bepaal $A - B + C$ als $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -a & 2b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ en $C = \begin{bmatrix} 2a & -2b \\ a & 0 \end{bmatrix}$

Oefening 11

Bepaal x, y, z , en t als $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 2t & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & z \\ 4t & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$

Oefening 12

Bereken de matrices X en Y indien je weet dat $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ en $3X + 5Y = \begin{bmatrix} -2 & 14 \\ 19 & -5 \end{bmatrix}$

Oefening 13

Bepaal x en y als

$$1. \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & y & 4 \\ -1 & 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ y & 0 \\ -2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Oefening 14

Je hebt de volgende matrix A gegeven: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bereken de matrices A^2, A^3 en $A^k (k > 3, k \in \mathbb{N}_0)$