

# Appendix A: De rij van Fibonacci

## A.1 Het expliciete voorschrift van de rij van Fibonacci

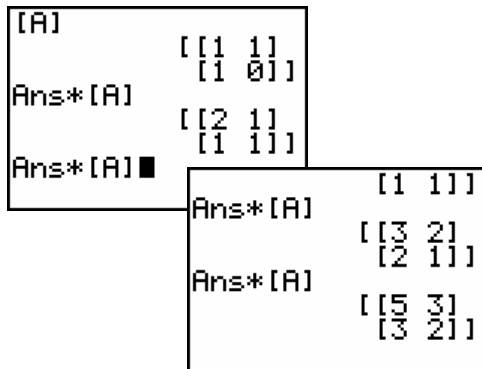
We noteren het  $n^{\circ}$  Fibonaccigetal met  $F_n$ . De rij van Fibonacci wordt gegeven door:

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	...
1	1	2	3	5	8	13	21	...

De volgende afleiding is gebaseerd op het artikel *Enkele eenvoudige toepassingen van groepen en ringen* van Prof. dr. Fanny Ooms (LUC).

Beschouw de matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Je kan met de grafische rekenmachine nagaan dat:



$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Zo ontdek je dat de machten van  $A$  als volgt opgebouwd worden met de getallen van Fibonacci:

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \text{ voor } n \geq 2.$$

We bepalen de oplossingen van de karakteristieke veelterm van  $A$ , de eigenwaarden, als

$$\text{volgt: } P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda \cdot I - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

De discriminant is 5 zodat de eigenwaarden van  $A$  gelijk zijn aan:  $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  en  $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**OPMERKING**

$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  noemt met ook het gouden getal of de gulden snede en  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ .

De Euclidische deling van  $\lambda^n$  door  $P_A(\lambda)$  geeft een quotiënt  $Q(\lambda)$  en een rest  $R(\lambda)$  zodat  $\lambda^n = P_A(\lambda) \cdot Q(\lambda) + R(\lambda)$ . Uit de berekening voor  $P_A(\lambda)$  volgt dat de graad van  $R(\lambda)$  kleiner moet zijn dan twee,  $R(\lambda) = b \cdot \lambda + c$ , zodat  $\lambda^n = P_A(\lambda) \cdot Q(\lambda) + b \cdot \lambda + c$ . (\*)

Uit de stelling van Hamilton-Cayley, die zegt dat iedere matrix  $A$  voldoet aan zijn karakteristieke veelterm ( $P_A(A) = 0$ ) volgt voor uitdrukking (\*):

$$A^n = P_A(A) \cdot Q(A) + b \cdot A + c \cdot I = b \cdot A + c \cdot I = b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

En vermits  $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$  geldt dat  $b = F_n$ .

Het invullen van de eigenwaarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  in vergelijking (\*) geeft het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \lambda_1^n = 0 \cdot Q(\lambda_1) + b \cdot \lambda_1 + c \\ \lambda_2^n = 0 \cdot Q(\lambda_2) + b \cdot \lambda_2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^n = b \cdot \lambda_1 + c \\ \lambda_2^n = b \cdot \lambda_2 + c \end{cases}.$$

Uit dit stelsel berekenen we  $b$ :  $b = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$ .

Een expliciet voorschrift voor de rij van Fibonacci is:  $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ .

Merk op dat uit dit expliciet voorschrift volgt dat  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$

## A.2 De gulden snede

Het getal  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  wordt vaak ook de gulden snede genoemd.

Dit getal speelde al sinds de Grieken een belangrijke rol in de kunst en bouwkunst. Het is de ideale verhouding tussen de lijnstukken van een verdeling van een lijnstuk in twee delen.

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l-x} = \varphi$$



Men kan aantonen dat de gulden snede ook gevonden wordt via de kettingbreuk

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Wil je  $\varphi$  benaderen met deze kettingbreuk, dan bekom je telkens het quotient van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci:

$$\varphi = 1 + 1 = \frac{2}{1}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$$

M.a.w. geldt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ .

## A.3 De rij van Fibonacci in de kunst

### A.3.1 De bouwkunst

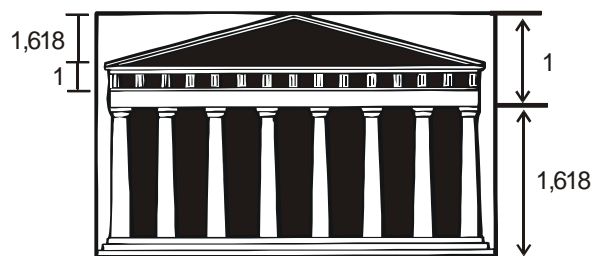
Het getal  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  duikt regelmatig op in de bouwkunst o.a. bij de

- Egyptenaren - de hoogte en de breedte van de verschillende piramides van Gizeh verhouden zich telkens volgens het getal  $\varphi$ .



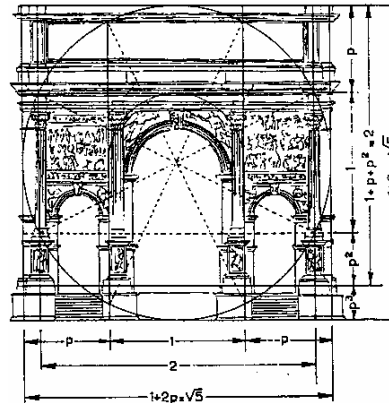
- Grieken - de hoogte en de breedte van de verschillende Griekse tempels verhouden zich telkens volgens het getal  $\varphi$ .

Bijvoorbeeld de voorgevel van het Parthenon in de Acropolis van Athene, lijkt volledig geïnspireerd te zijn op de gulden snede.



- Romeinen - bij de constructie van de triomfboog van Septimus Severus duikt het gouden getal

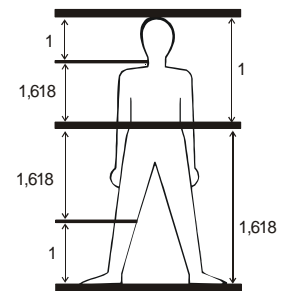
$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ op.}$$



### A.3.2 De schilderkunst

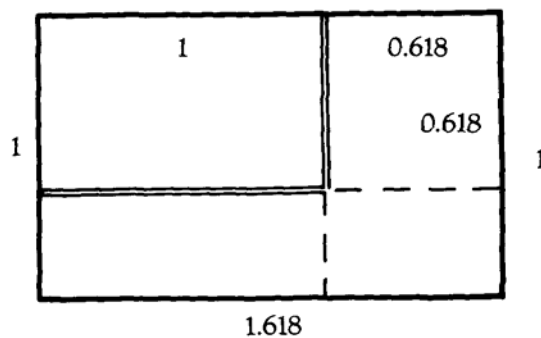
Het getal  $\varphi$  duikt ook op in de schilderkunst.

- Tekenaars en schilders maken gebruik van de gulden snede om mooi gevormde mensen te construeren.
- De hoogte en breedte van de beschilderde oppervlakten verhouden zich vaak zoals de gulden snede.



Heel wat schilders gebruiken bij de compositie de regel dat je object beter niet in het centrum van het doek staat, maar beter een beetje op zij. Ze gebruiken daarbij lijnen die het schilderij in drie verdeelt. Deze compositie zou aangenamer zijn om naar te kijken.

Het idee is gebaseerd op de gulden snede die de ideale verhouding zou zijn, niet alleen bij de afmetingen van het kader, maar ook bij de compositie.

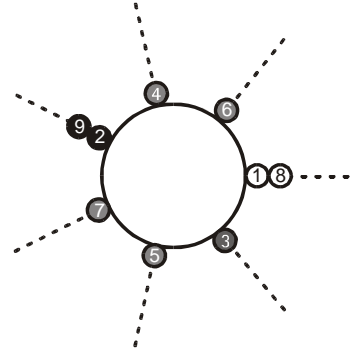


## A.4 De rij van Fibonacci in de natuur

### A.4.1 De zaadjes in een bloemenhart

Meestal is het bloemenhart opgebouwd uit kleine zaadjes. Ze worden geproduceerd in het midden en migreren systematisch naar de buitenkant van het bloemenhart. Doordat een nieuw zaadje telkens onder een bepaalde hoek ten opzichte van het vorige zaadje ontstaat, wordt de hele ruimte gevuld. De grootte van die hoek bepaalt de manier waarop de ruimte gevuld wordt.

Betreft het een hoek die te beschouwen is als een geheel deel van  $360^\circ$  (= een breuk van  $360^\circ$ ) dan zullen de zaadjes geschikt worden op rechte lijnen. Op de hiernaast afgebeelde figuur zie je de schikking voor een draaiingshoek van  $\frac{3}{7} \cdot 360^\circ \approx 154,28^\circ$  in tegenwijzerzin. Aangezien de noemer 7 is, bekom je 7 rechte lijnen.



Merk op dat na elk derde (=teller) zaadje een volledige omwenteling is gemaakt.

Indien de draaiingshoek niet op te vatten is als een breuk, zullen de zaadjes zich niet schikken in rechte lijnen. Ze vormen dan spiraalvormige armen die in het centrum van het bloemenhart vertrekken (zie figuur hieronder).

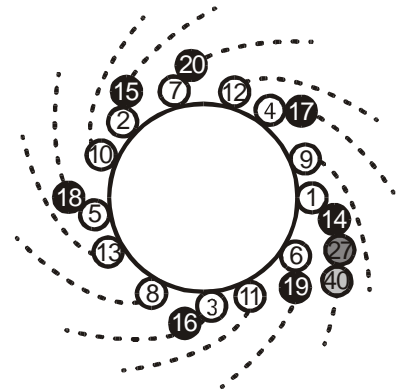
Om het rechtlijnig patroon in de schikking van zaadjes te vermijden, zul je dus een gedeelte van een volledige draai moeten kiezen dat bepaald is door een irrationaal getal.

Als dit irrationaal getal goed benaderd wordt door een breuk, krijg je een reeks gebogen lijnen die de ruimte niet perfect opvullen.

Als de draaiingshoek bepaald wordt door een irrationaal getal, dat moeilijk te benaderen is door een breuk, zal de spiraalvorming sterk aanwezig zijn en aanleiding geven tot een goed gevuld bloemenhart.

De gulden snede is zo een irrationaal getal. Indien de draaiingshoek bepaald wordt door deze gulden snede, zal het bloemenhart optimaal gevuld zijn.

Dat is ook wat men experimenteel vaststelt in de natuur. Men ziet een draaiingshoek<sup>1</sup> van  $137,5^\circ$ . Dit is de hoek  $(\varphi - 1) \cdot 360^\circ = 222,5$  in tegengestelde zin.

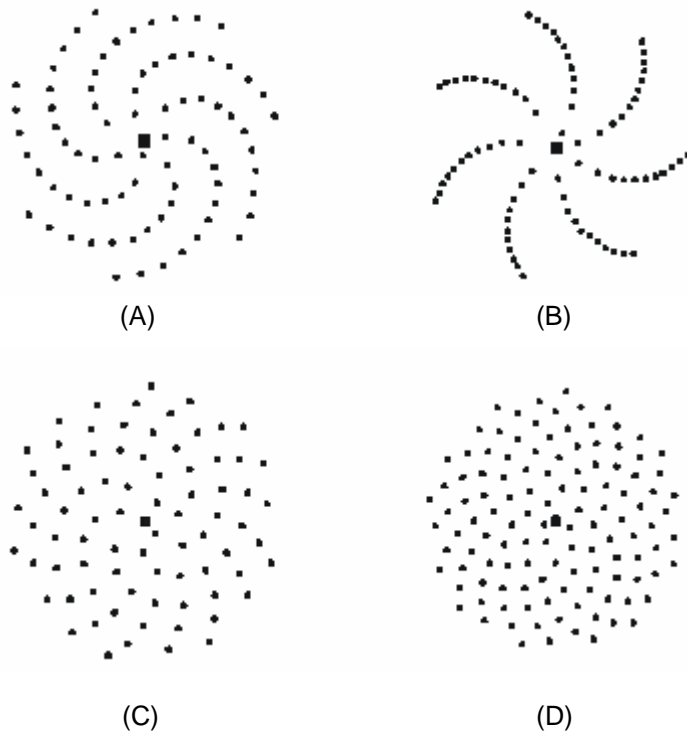


Voor andere irrationale getallen, vind je beduidend minder goede schikkingen.

Het decimaal gedeelte van  $e$  is iets groter dan  $\frac{5}{7}$  en dat van  $\pi$  iets kleiner dan  $\frac{1}{7}$ .

<sup>1</sup> Het volstaat om het decimaal gedeelte te nemen van  $\varphi$  (= 1,6180...), omdat de 1 voor de komma enkel voor een bijkomende rotatie van  $360^\circ$  zorgt, die niet bijdraagt tot de schikking. Het nemen van de hoek in tegengestelde draaiingszin heeft geen invloed heeft op de schikking.

In beide gevallen tref je zeven armen aan, die van e draaien in wijzerzin, die van  $\pi$  andersom.



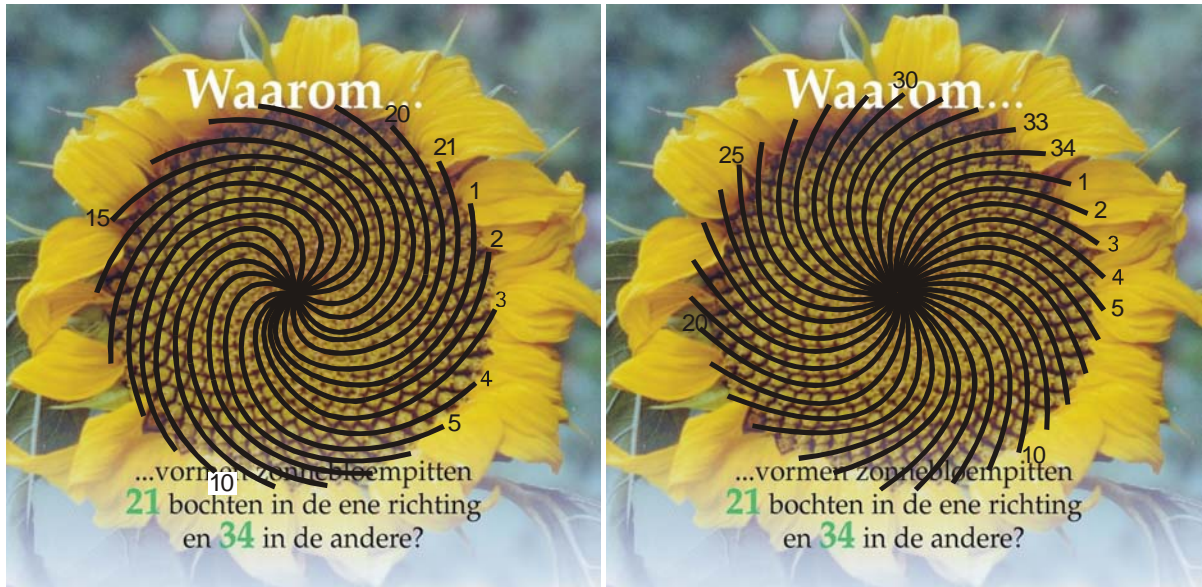
de schikkingen voor verschillende irrationale getallen.  
 (A) getal e (B) getal pi (C) wortel 2 (D)  $\varphi$

De gulden snede is het enige irrationaal getal waarbij in de twee draairichtingen spiralen te zien zijn. De aantallen worden bepaald door twee opeenvolgende Fibonaccigetallen. De rij van verhoudingen van opeenvolgende Fibonaccigetallen heeft als limiet  $1,6180\dots (= \varphi)$  of  $0,6180 (\frac{1}{\varphi})$ , al naargelang het grootste getal in teller of noemer wordt geplaatst. Beide limietwaarden bepalen dezelfde rotatiehoek omdat het decimaal gedeelte hetzelfde is.

Verhouding	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$
Decimaal	1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,6154	1,6190	1,6176
Verhouding	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{21}{34}$	$\frac{34}{55}$
Decimaal	1	0,5	0,6667	0,6	0,625	0,6154	0,6190	0,6176	0,6181

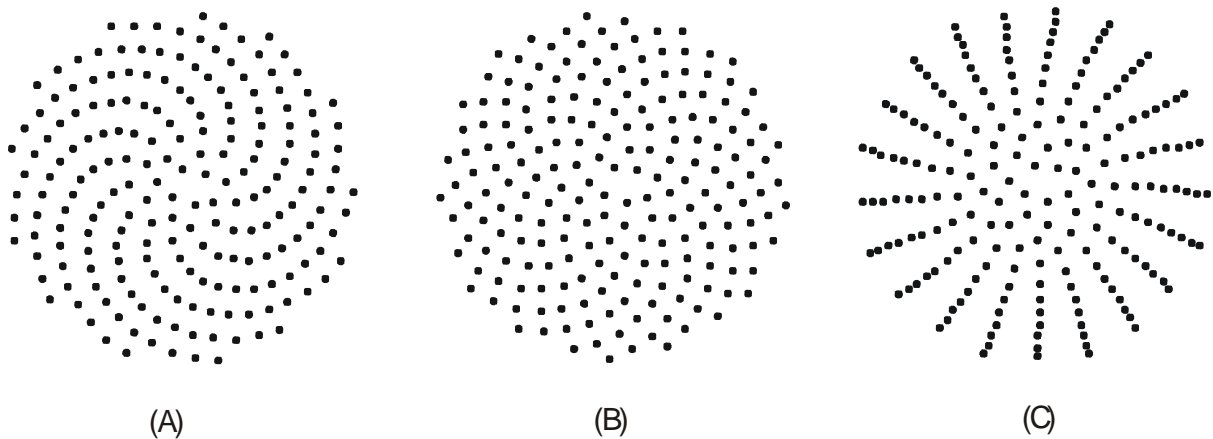
Beschouw bijvoorbeeld de breuk  $\frac{34}{21}$ . Het decimaal gedeelte van  $\varphi$  is iets kleiner dan dat van deze benadering. Dit resulteert in 21 armen in tegenwijzerzin.

En beschouw de breuk  $\frac{21}{34}$ . Deze geeft eveneens een benadering van het decimaal gedeelte van  $\varphi$ , dat in dit geval iets groter is dan de benadering. Dit resulteert in 34 armen in wijzerzin.



De spiralen zijn in de twee richtingen aangeduid. Je vindt 21 en 34 spiralen.

Het feit dat de benaderende breuk het aantal spiraalarmen in de zonnebloem verklaart, betekent niet dat de bijhorende benaderende rotatiehoek een even goede opvulling oplevert. In de onderstaande figuur merk je dat een lichte afwijking van het gouden getal in een heel ander patroon resulteert.



opvulpatroon voor (B) 1,618 ( $= \varphi$ ) en twee benaderingen (A) 1,617 en (C) 1,619

Het feit dat de gulden snede de draaiingshoek bepaalt van de zaadjes en daardoor ook het aantal spiralen, is niet toevallig. Het is een gevolg van het feit dat cellen van levend materiaal (vb. planten) spiraalsgewijs aangroeien in het centrum. De rotatiehoek is – inderdaad – ook  $137,5^\circ$ .

### A.4.2 Bloemblaadjes

Aangezien de bloemblaadjes gevormd worden op het einde van één van de reeksen spiralen, vind je de Fibonaccigetallen ook terug bij de aantallen van bloemblaadjes. Voor verschillende bloemen lijkt dit te kloppen, hoewel er vaker afwijkingen voorkomen dan bij het aantal spiralen in het bloemenhart.

Aantal bloemblaadjes	bloem
3	lelie, iris (lelies hebben vaak 6 bloemblaadjes , gevormd door twee sets van drie blaadjes.)
5	boterbloem, wilde roos, aquilegia
8	ridderspoor
13	jacobskruiskruid, cineraria
21	aster, chicorij
34	weegbree, pyrethrum

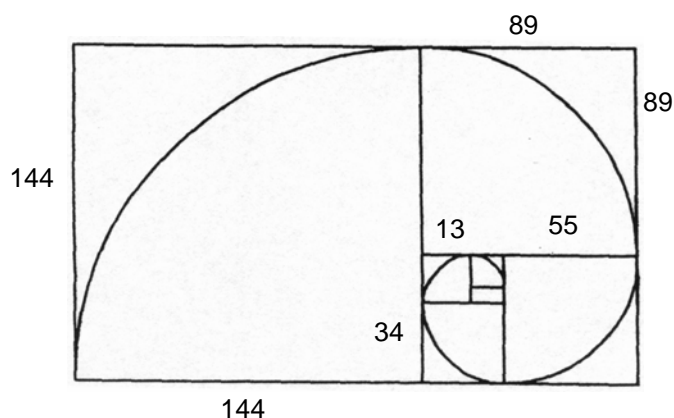
### A.4.3 Dennenappels

Bij denappels zijn de spiralen heel duidelijk zichtbaar. Je vindt acht spiralen in de ene richting en dertien in de andere. Ook hier duiken de Fibonacci getallen op.



### A.4.4 Schelpen

Als je in een rechthoek waarvan de lengte en de breedte zich verhouden als  $\varphi$  een spiraal tekent zoals hieronder aangegeven, bekom je een spiraal die je bij benadering terugvindt bij schelpen.



Je construeert in de "gouden" rechthoek het grootst mogelijke vierkant, waarin je een cirkelboog tekent. Het overblijvende stuk is opnieuw een gouden rechthoek, waarin je de constructie telkens herhaalt.