Deel 1 Matrices

1 Bewerkingen met matrices invoeren via voorbeelden

1.1 *n*-tallen en de bewerkingen

$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$ is een n-tal met $a_i \in \mathbb{R}$.

De verzameling van reële n -tallen noteren we met $\mathbb{R}^n$

Definieer de <u>*som*</u> als $(a_1,a_2,a_3,...,a_n) + (b_1,b_2,b_3,...,b_n) = (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,...,a_n+b_n)$.

Het tegengesteld n-tal is dan $(-a_1,-a_2,-a_3,...,-a_n)$ en het nulelement: $(0,0,0,...,0)$.

$\mathbb{R}^n$ uitgerust met de som, $\mathbb{R}^n,+$, is een commutatieve groep.

Definieer de <u>*scalaire vermenigvuldiging*</u> als $\lambda(a_1,a_2,...,a_n)=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$ met $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tot slot kun je je afvragen hoe de <u>*vermenigvuldiging*</u> gedefinieerd kan worden.

Neem (a_1,a_2) en $(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$.

Definiëer de vermenigvuldiging even als volgt: $(a_1,a_2).(b_1,b_2) = (a_1b_1,a_2b_2)$ met $(1,1)$ als eenheidselement.

Met deze definitie heb je een probleem dat een aantal elementen geen inverse hebben.

Neem bijvoorbeeld $(a,0)$. We zoeken dan (x,y) zodat $(a,0).(x,y) = (1,1)$.

Volgens de definitie geldt dat $(a,0).(x,y) = (ax,0y) = (1,1) \Rightarrow ax = 1$ en $0y = 1$ is vals.

Een andere definitie voor de vermenigvuldiging is aangewezen.

1.2 Invoeren van matrices

Neem $i \in \{1,2,3,.....,m\}$ en $j \in \{1,2,3,.....,n\}$
en de afbeelding $a : (i,j) \mapsto a(i,j) = a_{ij}$.

We schrijven deze $m.n$ beelden in een tabel en noemen dit een $m \times n$ -matrix.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$$ met m rijen en n kolommen

Een matrix noemt met vierkant als $m = n$. Het aantal rijen noemen we de orde van de matrix.

Bijzondere vierkante matrices:

- *NULMATRIX*: alle elementen gelijk aan nul.
- *Diagonaalmatrix*: $a_{ij} = 0$ voor $i \neq j$ *en* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ voor $i = j$.
- *SCALAIRE MATRIX*: diagonaalmatrix met gelijke elementen op de hoofddiagonaal.

De verzameling van alle reële $m \times n$-matrices noteren we met $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Twee matrices zijn gelijk als de overeenkomstige elementen gelijk zijn, m.a.w. voor $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ geldt dat $A = B \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1,2,...,m\}, \forall\, j \in \{1,2,...n\} : a_{ij} = b_{ij}$.

Twee matrices *gelijksoortig* als ze dezelfde dimensie hebben.

1.3 Som van matrices

Een herbergier heeft in zijn café een voorraad van 2 bakken cola en 3 bakken cola light, 4 bakken fruitsap en 2 bakken calorie-arme fruitsap, 6 bakken pils en 1 bak alcoholvrij bier. Voor de kermis van zaterdag vreest hij een tekort en hij doet een bijkomende bestelling van 2 bakken cola en 2 bakken cola-light, 3 bakken fruitsap en 4 bakken calorie-arm fruitsap, 5 bakken pils en 2 bakken alcoholvrij bier.

We plaatsen de voorraad in een voorraadmatrix A en de bestelling in een bestellingsmatrix B.

$$A = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Wat is nu zijn nieuwe voorraad?

4 bakken cola en 5 bakken cola-light, 7 bakken fruitsap en 6 bakken calorie-arm fruitsap, 11 bakken pils en 3 bakken alcoholvrij bier.

Deze waarden schikken we weer in een matrix C:

$$C = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

C bekom je door de overeenkomstige elementen (elementen met een zelfde rijnummer en eenzelfde kolomnummer) van A en B op te tellen.

Men kan alleen gelijksoortige matrices optellen!

<u>Algemene definitie</u>

Voor $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ geldt $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Voor een matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ noemen we de matrix $-A = [-a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de tegengestelde matrix.

Voor $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiëren we het verschil als volgt:

$A - B = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

1.4 Scalaire vermenigvuldiging

Als de herbergier een dubbel zo grote bestelling doet (de weersvoorspellingen zijn heel gunstig) dan vraagt hij 4 bakken cola en 4 bakken cola-light, 6 bakken fruitsap en 8 bakken caloriearm fruitsap, 10 bakken pils en 4 bakken alcoholvrij bier.

Het plaatsen van deze getallen in een matrix D geeft:

$$D = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}.$$

Indien we alle elementen van de eerste bestellingsmatrix vermenigvuldigen met 2, bekomen we de matrix D.

<u>Algemene definitie</u>

Voor $k \in \mathbb{R}$ en $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is $kA = [ka_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1.5 De vermenigvuldiging

Als we een vermenigvuldiging definiëren zoals bij n-tallen, $(A \cdot B)_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$, is dit ook nu weer geen erg nuttige vermenigvuldiging.

We voeren daarom de volgende vermenigvuldiging in.

UITGEWERKT VOORBEELD

Alle onderstaande getallen komen uit de voedingsmiddelentabellen van NUBEL (www.nubel.com) en geven waarden aan per 100g van het voedingsmiddel.

Een ontbijt bestaat uit chocolademelk (halfvol), croissant, volkorenbrood en mager kalkoenbeleg.

Chocolademelk	3,2 g eiwit	1,6 g vet	12,9 g koolhydraten	0 g vezels
Croissant	9,2 g eiwit	26,3 g vet	50.3 g koolhydraten	2,3 g vezels
Volkorenbrood	11,1 g eiwit	2,3 g vet	44 g Koolhydraten	6,4 g vezels
Kalkoen	22,6 g eiwit	1,4 g vet	0,6 g koolhydraten	0 g vezels

Een ontbijt bestaat uit a gram chocolademelk, b gram croissant, c gram volkorenbrood en d gram kalkoenbeleg.

Hoeveel eiwit, vet, koolhydraten (KH) en vezels bevat dit ontbijt? We gebruiken de cijfers uit de bovenstaande tabel die omgerekend worden naar 1 g van het voedingsmiddel.

<u>Eiwit</u>: $0{,}032\,a + 0{,}092\,b + 0{,}011\,c + 0{,}226\,d$
<u>Vet</u>: $0{,}016\,a + 0{,}263\,b + 0{,}023\,c + 0{,}014\,d$
<u>KH</u>: $0{,}129\,a + 0{,}503\,b + 0{,}44\,c + 0{,}006\,d$
<u>Vezels</u>: $0\,a + 0{,}023\,b + 0{,}064\,c + 0\,d$

Telkens wordt voor elk bestanddeel (eiwit, vet, KH, vezels) in de **4** voedingselementen van het ontbijt het product gemaakt met de **4** gebruikte hoeveelheden a, b, c en d.

We schikken de gegevens in een matrix A van 4 rijen en 4 kolommen.

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{E} \\ \text{V} \\ \text{KH} \\ \text{Vez} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Ch} & \text{Cr} & \text{Vkbr} & \text{Kb} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,032 & 0,092 & 0,111 & 0,226 \\ 0,016 & 0,263 & 0,023 & 0,014 \\ 0,129 & 0,503 & 0,44 & 0,006 \\ 0 & 0,023 & 0,064 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Om het eiwit-, vet-, koolhydraten- en vezelgehalte in het volledige ontbijt te kennen moeten de **4** elementen op elke rij vermenigvuldigd worden met de **4** hoeveelheden a, b, c en d.

Deze **4** getallen schikken we in een kolommatrix B.

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Ch} \\ \text{Cr} \\ \text{Vkbr} \\ \text{Kb} \end{array}$$

0.032 a + 0.092 b + 0.111 c + 0.226 d is het product van de 4 elementen van de eerste rij met de 4 elementen van de kolom.

Zo ook vermenigvuldigen we de 4 elementen van de tweede, derde en vierde rij met de 4 elementen van de kolom.

Deze 4 producten schikken we in een kolommatrix C.

$$C = \begin{bmatrix} 0,32a + 0,092b + 0,111c + 0,226d \\ 0,016a + 0,263b + 0,023c + 0,014d \\ 0,129a + 0,503b + 0,44c + 0,006d \\ 0a + 0,023b + 0,064c + 0d \end{bmatrix}$$

C noemen we het product van A en B.

Op deze manier is de vermenigvuldiging van matrices ingevoerd. Let vooral op de voorwaarde dat het aantal elementen van een rij van A gelijk moet zijn aan het aantal elementen van een kolom van B of anders gezegd moet het aantal kolommen van A gelijk zijn aan het aantal rijen van B (rij-kolom regel).

In ons voorbeeld is A een $\boxed{4}$ x **4** matrix en B een **4** x $\boxed{1}$ matrix.

Voor $C = A \cdot B$ is het aantal rijen $\boxed{4}$, het aantal rijen van A en het aantal kolommen $\boxed{1}$, het aantal kolommen van B.

Merk op dat gezien bovenstaande voorwaarde $B \cdot A$ onmogelijk is! M.a.w. De vermenigvuldiging van matrices is **niet-commutatief.**

<u>Algemene definitie</u>

Als $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times p}$ en $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times n}$ is $C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ met

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} \quad (\ i \in \{1,2,...,m\},\ j \in \{1,2,...n\}).$$

Opmerking
Voor de vermeningvuldiging van reële getallen, bijvoorbeeld x en y, geldt de eigenschap dat indien $x \cdot y = 0$ dat ofwel $x = 0$ of dat $y = 0$.

Voor de vermenigvuldiging van matrices geldt deze eigenschap niet.

Als tegenvoorbeeld beschouwen we de matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ en $B \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Duidelijk geldt dat $A \neq 0$ en $B \neq 0$ maar toch geldt dat $A \cdot B = 0$.

A en B nomet men nuldelers.

1.6 Eenheidsmatrix en inverse matrix

1.6.1 Eigenschappen in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ is 1 het eenheidselement voor de vermenigvuldiging daar $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
In $\mathbb{R}$ heeft elk getal $a \neq 0$ een inverse voor de vermenigvuldiging want
$a.\, a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 = \frac{1}{a}.a = 1$ (Let op de commutativiteit!).

In $\mathbb{R}$ geldt voor $a \neq 0$: $a \cdot x = b \Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$.

1.6.2 Analoge eigenschappen bij matrices

De **eenheidsmatrix *I*** is een vierkante matrix die vermenigvuldigd met een vierkante matrix A van dezelfde dimensie terug die matrix A oplevert.

$A \cdot I = I \cdot A = A$ (Zie analogie met de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$.)

Uit de rij-kolomregel en uit de commutativiteitsvoorwaarde volgt dat alleen bij de vermenigvuldiging van vierkante matrices het zinvol is te praten over een eenheidsmatrix.

We bepalen de eenheidsmatrix van orde 2 .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + bz = a \\ cx + dz = c \end{cases} \text{ en } \begin{cases} ay + bu = b \\ cy + du = d \end{cases}.$$

Het oplossen van deze stelsels van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden geeft als oplossing $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Indien A een **inverse** matrix, A^{-1}, heeft, moet $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$ (Zie analogie in $\mathbb{R}$.). In $\mathbb{R}$ heeft enkel 0 geen invers element. En wat in $\mathbb{R}^{nxn}$?

Heeft $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ een inverse? En $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$?

We bepalen de voorwaarde opdat $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ een invers heeft.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} ay+bu=0 \\ cy+du=1 \end{cases}.$$

Het oplossen van deze stelsels, (x,y,x,u) i.f.v. (a,b,c,d), geeft de volgende voorwaarde om oplossingen te hebben: $ad-bc\neq 0$.

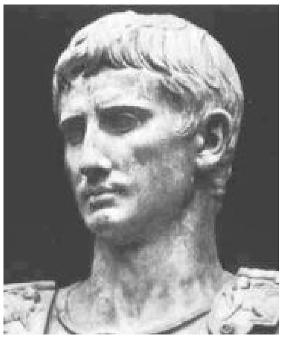
Vierkante matrices die een inverse matrix hebben, noemen we heten **regulier** en in het andere geval **singulier**.

Meetkundige interpretatie

Elk stelsel stelt 2 rechten voor. Beide stelsels hebben één oplossing voor elke onbekende als de rechten snijdend zijn, m.a.w. als de richtingscoëfficiënten verschillend zijn: $-\frac{a}{b}\neq -\frac{c}{d}$.

1.6.3 Toepassing

Cryptologie is de leer van geheime codes en wordt gebruikt voor het ontcijferen van bankkaartcodes, paswoorden, … .



a. METHODE VAN CAESAR

De eenvoudigste toepassing van substitutie-vercijfering werd ingevoerd door Julius Caesar. Elke letter van het alfabet wordt vervangen door de letter die 3 plaatsen verder staat in het alfabet.

Voorbeeld	PUKKELPOP	$C: p \mapsto p+3$
	SXNNHPSRS	$D: p \mapsto p-3$

b. GEBRUIK VAN MATRICES

Een andere methode is het gebruik van **matrices** bij coderen en decoderen:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z	$-$	A	B	C	D	E	F	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	…………

Voorbeeld	P	U	K	K	E	L	P	O	P
	16	21	11	11	5	12	16	15	16

Stap 1

Schrijf de letters in 2x1 matrices en zet om in getallen.

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Stap 2 **- Codering (encryptie)**

Kies een willekeurige vierkante matrix van dimensie 2, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, en bereken:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 37 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 43 \end{bmatrix}$$

De boodschap wordt: $\begin{bmatrix} 21 \\ 37 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 \\ 43 \end{bmatrix}$.

Terug omgezet in letters geeft dit:

$$\begin{matrix} 21 & 37 & 11 & 22 & 12 & 17 & 15 & 31 & 27 & 43 \\ U & J & K & V & L & Q & O & D & - & P \end{matrix}$$

Voor het terug omzetten in letters trekken we voor getallen groter dan 27 een veelvoud van 27 af en voor getallen kleiner dan 1 tellen we een veelvoud van 27 bij.

Bijvoorbeeld: $30 \to 30-27=3 \to C$ $\qquad$ -12$\to -12+27=15 \to O$.

Stap 3 **- Decoderen of ontcijferen (decryptie)**

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 37 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 \\ 43 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 21 & 37 & 11 & 22 & 12 & 17 & 15 & 31 & 27 & 43 \\ U & J & K & V & L & Q & O & D & - & P \end{matrix}$$

Diegene die de boodschap ontvangt moet dit ontcijferen en de vermenigvuldiging met de sleutel $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ opheffen. Dit komt er op neer een matrix te vinden die weer de oorspronkelijke getallen teruggeeft.

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 21 \\ 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 21 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 27 \end{bmatrix}$$

We zoeken $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ zodat $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

De rij-kolomregel toepassen, geeft: $\begin{cases} 0x+1y=1 \\ 1x+1y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ en $\begin{cases} 0z+1u=0 \\ 1z+1u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ z=1 \end{cases}$

Volgens de definitie van de inverse matrix, is dit de matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.7 Associativiteit van de vermenigvuldiging

We hernemen ons ontbijt en we willen het aantal Kcal (eenheid van energiewaarde) kennen. (1 Joule = 4.2 Kcal)

1 g eiwit bevat 4 Kcal
1 g vet bevat 9 Kcal
1 g koolhydraten bevat 4 Kcal
1 g vezels bevat 0 Kcal

Hoeveel Kcal is er in 100 g chocolademelk?

100 g chocolademelk bevat 3,2 g eiwit, 1,6 g vet, 12,9 g KH en 0 g vezels en zo

3,2 . 4 + 1,6 . 9 + 12,9 . 4 + 0 . 0 = 78,8 Kcal.

We bepalen een nieuwe matrix D met de energiewaarden van eiwit, vet, KH en vezels. Vermits in het product 3,2; 1,6; 12,9; en 0 de getallen zijn op de eerste kolom van A en rekening houdend met de rij-kolomregel zal D een 1 x 4 matrix moeten zijn die we links vermenigvuldigen met A.

Noem $D \cdot A = E$ met elementen e_{ij} voor $i = 1$ en $j \in \{1,2,3,4\}$.

Per gram geeft dit:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Ch} & \text{Cr} & \text{Vkbr} & \text{Kb} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}032 & 0{,}092 & 0{,}111 & 0{,}226 \\ 0{,}016 & 0{,}263 & 0{,}023 & 0{,}014 \\ 0{,}129 & 0{,}503 & 0{,}44 & 0{,}006 \\ 0 & 0{,}023 & 0{,}064 & 0 \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$\begin{bmatrix} 4\times 0{,}032+9\times 0{,}016+4\times 0{,}129+0\times 0 & e_{12} & e_{13} & e_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}788 & e_{12} & e_{13} & e_{14} \end{bmatrix}$$

e_{11} geeft de energiewaarde in 1 g chocolademelk (halfvol) = 0,788 Kcal,
e_{12} geeft de energiewaarde in 1 g croissant = 4,747 Kcal,
e_{13} geeft de energiewaarde in 1 g volkorenbrood = 2,411 Kcal,
e_{14} geeft de energiewaarde in 1 g kalkoen = 1,054 Kcal.

Veronderstel dat ons ontbijt als volgt is samengesteld:
a = 250 g (chocolade), b = 35 g (croissant),
c = 60 g (volkorenbrood) en d = 50 g (kalkoen).

$$D = \begin{bmatrix} 250 \\ 35 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix}$$

De energiewaarde in dit ontbijt bedraagt:

0,788 . 250 + 4,747 . 35 + 2,411 . 60 + 1,054 . 50 = 560,505 Kcal.

$$\begin{bmatrix} 0,788 & 4,747 & 2,411 & 1,054 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 250 \\ 35 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560,505 \end{bmatrix} = F$$

of kortweg: $(D \cdot A) \cdot B = E \cdot B = F$.

We gaan na of het verplaatsen van de haakjes, $D \cdot (A \cdot B) = D \cdot C = G$, hetzelfde resultaat oplevert.

We bepalen $A \cdot B = C$. De matriix C geeft ons het eiwit, het vet, het KH en het vezelgehalte in het ontbijt.

$$C = \begin{bmatrix} 0,032 & 0,092 & 0,111 & 0,226 \\ 0,016 & 0,263 & 0,023 & 0,014 \\ 0,129 & 0,503 & 0,44 & 0,006 \\ 0 & 0,023 & 0,064 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 250 \\ 35 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 29,18 \\ 15,285 \\ 76,555 \\ 4,645 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Eiwit} \\ \text{Vet} \\ \text{KH} \\ \text{Vezels} \end{array} \end{array}$$

Om de totale energiewaarde te kennen maken we het product:

4 . 29,18 + 9 . 15,285 + 4 . 79,255 + 0 . 4,645 = 571,305 Kcal .

In matrixnotatie geeft dit: $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 29,18 \\ 15,285 \\ 76,555 \\ 4,645 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560,505 \end{bmatrix} = G$.

We besluiten dat $(D \cdot A) \cdot B = D \cdot (A \cdot B)$.

De associativiteit van de vermenigvuldiging van matrices kan men formeel bewijzen.

2 Toepassingen van matrices

2.1 Matrices en verkeer

2.1.1 Definities

Een **graaf** is een figuur bestaande uit een eindig aantal punten (= knopen) en een eindig aantal verbindingslijnen (= takken) tussen die knopen.

Een graaf is **enkelvoudig** als voor elk tweetal knopen ten hoogste 1 verbinding bestaat. Indien er voor tenminste 2 knopen meerdere verbindingen bestaan dan spreekt men van een **meervoudige** graaf.

Twee knopen verbonden door tenminste 1 tak noemt men **buren** of verbonden knopen. Een tak die hetzelfde beginpunt en eindpunt heeft is een **lus**.

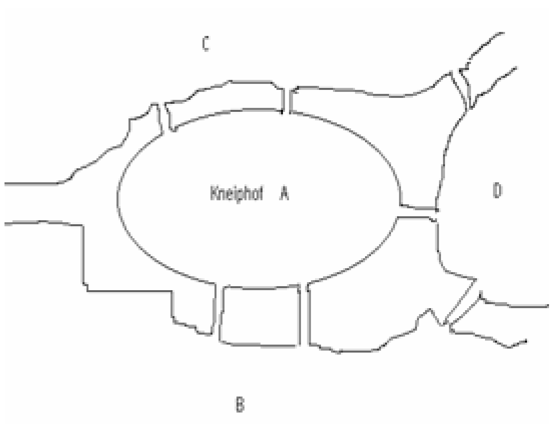
Een **pad** van een knoop p naar een knoop q is een rij van opeenvolgende verbindingslijnen startend in de knoop p en eindigend in de knoop q.

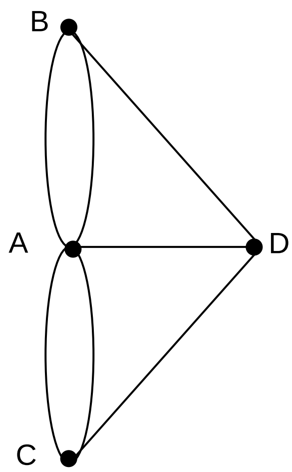
Bij n knopen zijn er maximaal $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ verbindingen.

2.1.2 Het probleem van Köningsberg

In Köningsberg (Oost-Pruisen - 18^{e} eeuw) vroegen de bewoners zich af of het mogelijk zou zijn een wandeling te maken over de 4 delen van de stad die verbonden zijn door 7 bruggen, en wel zo dat elke brug precies 1-maal werd gebruikt. Euler was de eerste die een bewijs gaf voor dit probleem.

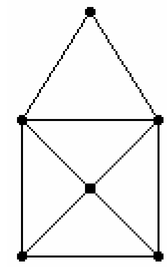
Euler stelde ieder deel voor door een punt en iedere brug door een lijn.





Stel namelijk dat er inderdaad een route bestaat waarbij je één keer elke brug passeert. Die tocht is logischerwijze ergens begonnen en ergens geëindigd. Het is ook logisch dat op elke halte tussen dat begin en einde een even aantal bruggen moet samenkomen. Immers: als je tijdens je tocht bijvoorbeeld op plein A komt, moet je er via een andere brug weer af (en beland je nog een keer in A, moet je er via weer een andere brug van af). Via dezelfde redenering begrijpen we ook dat zowel het start- als het eindpunt juist een oneven aantal bruggen moet hebben. Een zogenaamde Eulertocht lukt alleen als de graaf exact twee punten heeft met een oneven aantal verbindingen. En helaas, bij de Köningsberger-bruggen zijn alle vier punten oneven.

Een gelijkaardig probleem is of de figuur hiernaast in één pennetrek kan getekend worden.



Een graaf die aan de voorgaande probleemstelling voldoet, noemt men een Euler-pad.

Euler bewees[*] dat een graaf een Euler-pad is als het aantal punten met een oneven aantal verbindingspunten gelijk is aan nul of twee.

Indien er geen oneven punten zijn, noemt men de graaf een Euler-circuit. Het beginpunt mag willekeurig gekozen worden.

In het geval van twee oneven punten, kan je alleen met zekerheid zeggen dat er een Euler-pad is. Het beginpunt moet samenvallen met één oneven punt en het eindpunt met het andere.

Zoek uit medelijden met de burgers van Königsberg een oplossing voor hun probleem.

2.1.3 Verbindingsmatrix

Definitie

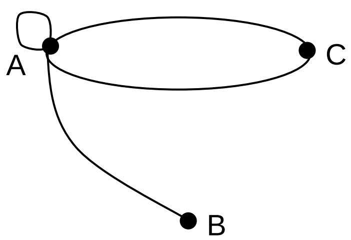
Bestaat een graaf K uit n knopen A_1 , A_2 , …, A_n dan stelt M de $n \times n$-verbindingsmatrix van K voor, waarbij:

> m_{ij} = 0 als A_i en A_j niet verbonden zijn en
> m_{ij} = 1 als A_i en A_j door minstens 1 tak verbonden zijn.

Opmerking

Het kan bij eenrichtingsverkeer dat m_{ij} = 1 en m_{ji} = 0

Voorbeeld: Graaf K met 3 knopen, $A_1 = \text{A}$, $A_2 = \text{B}$ en $A_3 = \text{C}$.

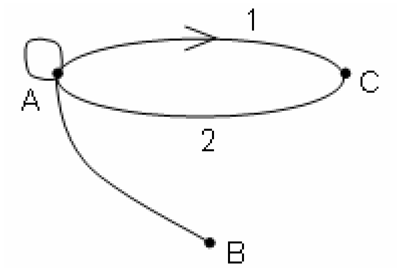


$$M = \quad \begin{array}{r c} & \text{van A B C} \\ \begin{array}{r} \\ \\ \text{naar} \end{array} \begin{array}{r} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Merk op dat deze matrix de "graaf" overbodig maakt.

2.1.4 Directe-wegenmatrix van K

De directe-wegenmatrix van K is de matrix met als elementen m_{ij} = aantal takken van A_i naar A_j (ook voor i=j). Voor het onderstaande voorbeeld geldt weer: $A_1 = \text{A}$, $A_2 = \text{B}$ en $A_3 = \text{C}$.



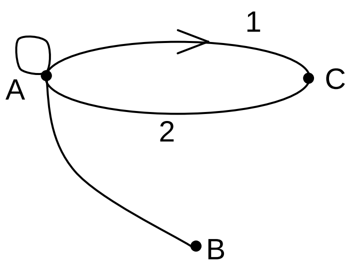
$$M = \quad \begin{array}{r c} & \text{van A B C} \\ \begin{array}{r} \\ \\ \text{naar} \end{array} \begin{array}{r} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Van A naar C zijn 2 wegen waarvan 1 met éénrichtingsverkeer!

---

[*] Met graaf bedoelen we een samenhangende graaf. Dit is een graaf waarbij het steeds mogelijk is tussen twee willekeurige knopen een pad te construeren.

2.1.5 2-stapsverbindingen



Weg 1 van A naar C is een éénrichtingsverbinding. Indien je van A naar C gaat via weg 1, moet je via weg 2 terug naar A.

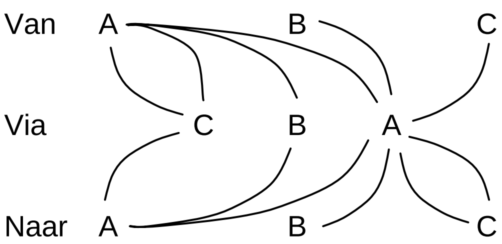
Opsomming van alle 2-stapsverbindingen:

A $\underset{2}{\rightarrow}$ C $\underset{2}{\rightarrow}$ A	A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ A
A $\underset{1}{\rightarrow}$ C $\underset{2}{\rightarrow}$ A	A $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B
C $\underset{2}{\rightarrow}$ A $\underset{1}{\rightarrow}$ C	A $\rightarrow$ A $\rightarrow$ A
C $\underset{2}{\rightarrow}$ A $\underset{2}{\rightarrow}$ C	B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ A
C $\underset{2}{\rightarrow}$ A $\rightarrow$ B	C $\rightarrow$ A $\rightarrow$ A
B $\rightarrow$ A $\underset{1}{\rightarrow}$ C	B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B
B $\rightarrow$ A $\underset{2}{\rightarrow}$ C	A $\rightarrow$ A $\underset{2}{\rightarrow}$ C
	A $\rightarrow$ A $\underset{1}{\rightarrow}$ C

Dit geeft de volgende matrix:

$$\begin{array}{ll} & \text{van A B C} \\ \text{naar} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

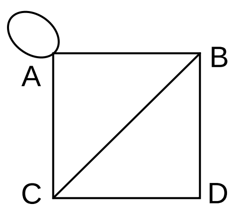
Voorstelling van de 2-stapsverbindingen met volgende graaf:



Bereken, met de grafische rekenmachine, $M \times M = M^2$. Wat stel je vast?

2.1.6 3-stapsverbindingen

De verbindingsmatrix van de hieronder afgebeelde graaf is:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

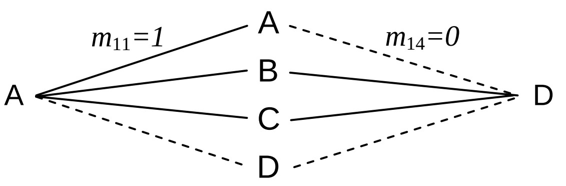
Als tweestapsverbindingen vinden we:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = M.M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Door de keuze van de getallen 0 en 1 in de verbindingsmatrix zal een onmogelijke tweestapsroute minstens één factor 0 bevatten.

Neem bijvoorbeeld m_{14} van M^2, m_{14} = 2, het aantal tweestapsverbindingen van A naar D. Vermenigvuldiging van de 1e rij van M met de 4e kolom van M geeft m_{14} van M^2:

$1.0 + 1.1 + 1.1 + 0.0 = m_{11}\,m_{14} + m_{12}\,m_{24} + m_{13}\,m_{34} + m_{14}\,m_{44}$.



-------- = geen verbinding

De 3-stapsverbindingen zijn:

$$M^3\text{= van } \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \quad M^3 = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

m_{14}=4 van M^3, de 3-stapsverbindingen van A naar D, is het product van de 1e rij van M^2, de 2-stapsverbindingen van A naar A, B, C en D, met de 4e kolom van M, de 1-stapsverbindingen van A, B, C en D naar D:

3.0+2.1+2.1+2.0=4 namelijk AAB-D, ACB-D, AAC-D, en ABC-D

<u>Algemeen</u>

Het element op de i e -rij en j e -kolom, m_{ij}, van M^k (met M de directe-wegenmatrix) is het aantal k-stapsverbindingen tussen A_i en A_j.

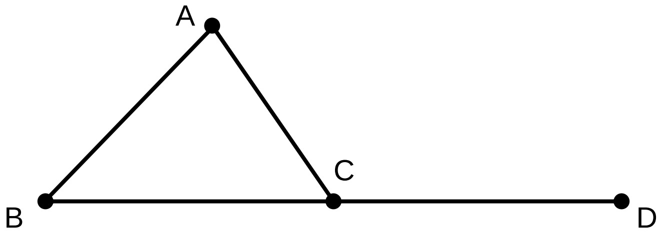
$M^0 + M^1$ geeft het aantal verbindingen bestaande uit <u>hoogstens</u> 1 stap,

$M^0 + M^1 + M^2$ het aantal verbindingen van <u>hoogstens</u> 2 stappen en

$M^0 + M^1 + M^2 + ... + M^k$ aantal verbindingen van <u>hoogstens</u> k stappen.

De som die geen enkele 0 meer bevat heet de oplossingsmatrix T^k waarbij k de **diameter** van de graaf is. Er zijn hoogstens k stappen nodig om gelijk welke twee plaatsen met elkaar te verbinden.

Oefening 1



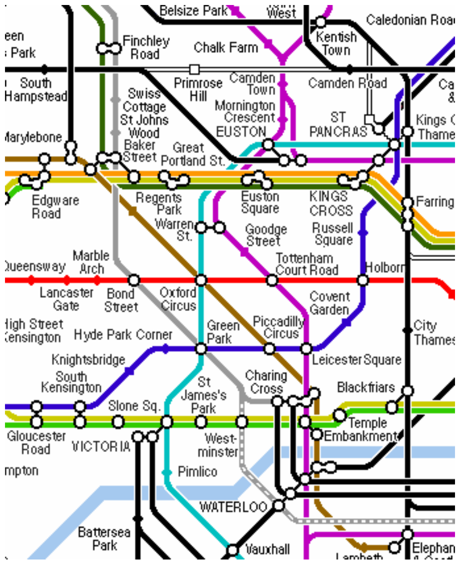
(i) Stel de verbindingsmatrix op.

(ii) Bereken met de grafische rekenmachine 2- en 3-stapsverbindingen.

(iii) Bepaal de diameter van de graaf.

Oefening 2

In onderstaande figuur vind je een deel van het *Underground*-netwerk in Londen.

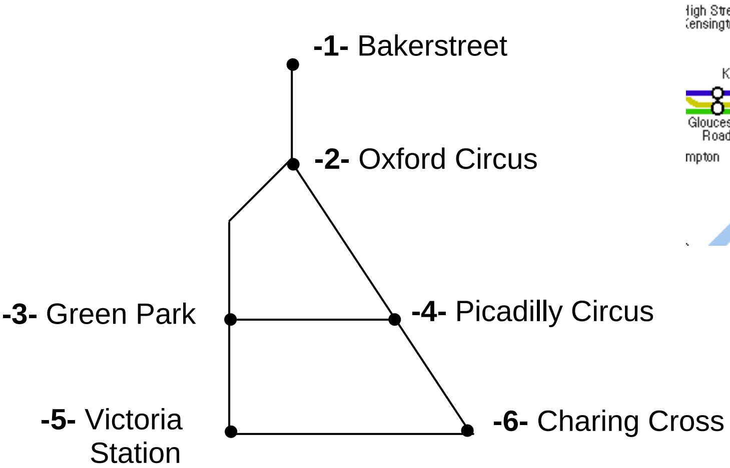


(i) Bepaal de verbindingsmatrix D.

(ii) Bereken $D^0 + D^1 + D^2$.

(iii) Bepaal de diameter van de graaf.

(iv) Bepaal het element t_{23} van de oplossingsmatrix.

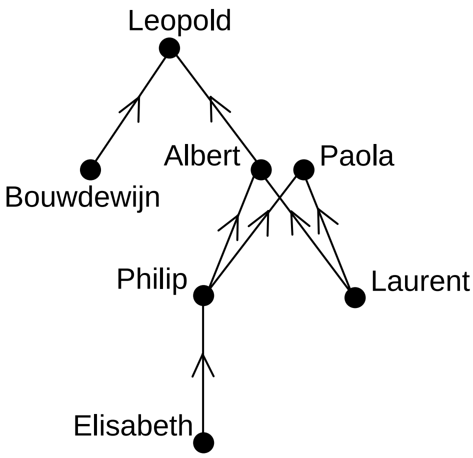


2.2 Matrices in sociale wetenschappen

2.2.1 Een fragment

"… *ze werden verwelkomd door Leopold, zijn zonen Albert en Boudewijn en zijn dochter Charlotte, Albert's vrouw Paola en hun zonen Philip en Laurent en Philip's dochter Elisabeth* … ."

Met de relatie "… is kind van …" maken we de volgende graaf:



De volgende matrix A, met nullen (… is geen kind van …) en enen (… is een kind van …), representeert deze graaf.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Van} \\
 & \begin{array}{ccccccc} \text{L} & \text{A} & \text{B} & \text{P} & \text{Ph} & \text{La} & \text{E} \end{array} \\
\text{naar} \begin{array}{c} \text{L} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{P} \\ \text{Ph} \\ \text{La} \\ \text{E} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

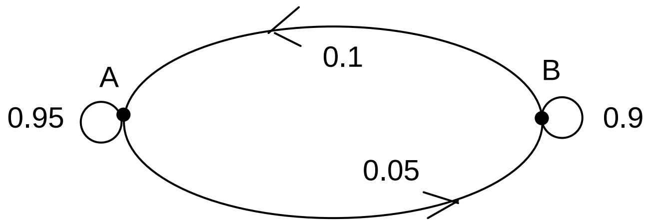
Bereken, met de grafische rekenmachine, A^2: "… is een kleinkind van …" en A^3: " … is achterkleinkind van …" .

2.2.2 Overgangsmatrix

Een **overgangsmatrix** is een matrix die hoort bij een graaf met 2 knopen waarin de overgangen "in een vaste periode" worden aangegeven.

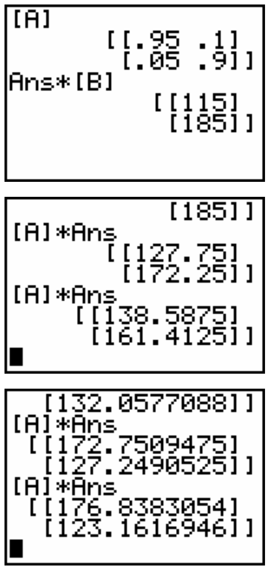
VOORBEELD 1

In een dorp zijn twee winkels A en B. Elke maand zijn er klanten van winkel A die de volgende maand naar winkel B gaan en andersom. De meeste klanten blijven gewoon bij hun oude winkel. Bij de opening van de winkels zijn er 100 klanten bij A en 200 klanten bij B.



De overgangsmatrix is: naar $\begin{array}{c} \\ \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array}$

De elementen van de overgangsmatrix geven deovergangen aan. De som van de elementen van elke kolom is telkens 1.



Situatie na 1 periode (= 1 maand):

$$\begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} = \begin{bmatrix} 115 \\ 185 \end{bmatrix}$$

Situatie na 2 periodes (= 2 maand):

$$\begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 115 \\ 185 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 172 \end{bmatrix}$$

Evolutie na enkele maanden:

$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 115 \\ 185 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 128 \\ 172 \end{bmatrix} \rightarrow ...... \rightarrow \begin{bmatrix} 173 \\ 127 \end{bmatrix} \rightarrow ... \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Bij A is er elke maand een steeds kleinere toename, terwijl er bij B elke maand een steeds kleinere daling is. De toestand evolueert naar een **stabiele verdeling**.

VOORBEELD 2

In een ontwikkelingsland is er een wekelijks mededelingsprogramma voor landbouwers waarin een technologische evolutie wordt uiteengezet. deze landbouwers hebben onderling geen contact. De kans dat een landbouwer luistert is 20%. Op $t = 0$ weet geen enkele landbouwer iets van de innovatie.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ gedeelte niet-weters 100 \%} \\ \rightarrow \text{ gedeelte weters 0\%} \end{array}$

naar $\begin{array}{c} \\ \\ nw \\ w \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} nw & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{niet-weters} \\ \text{weters} \end{array}$

Na 1 week zijn er van de 100 niet-weters nog 80 niet-weters en de andere 20 zijn weters.
Hoe is de situatie na 5 weken?

$A^5 = \begin{bmatrix} 0.32768 & 0 \\ 0.67232 & 1 \end{bmatrix}$ Resulaat na 5 weken: A^5. $A^5 \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.768 \\ 67.232 \end{bmatrix}$ $\begin{array}{l} \text{niet-weters} \\ \text{weters} \end{array}$

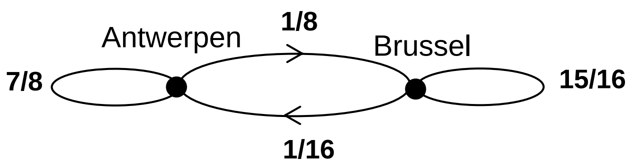
Hoe komt dat de groep van “weters” niet elke week met 20% toeneemt?

Nadat er 80% “weters” zijn, wordt een volgende innovatie gestart. Na hoeveel weken is dit?

2.3 Matrices in biologie of aardrijkskunde

2.3.1 Migratie

De migratie tussen Brussel en Antwerpen wordt als volgt schematisch weergegeven:



De bijhorende migratie-matrix is $A = \begin{bmatrix} 7/8 & 1/16 \\ 1/8 & 15/16 \end{bmatrix}$, in een tijdspanne van 5 jaar.

Bereken de bevolkingsaantallen van Brussel en Antwerpen na 5 en 20 jaar als de beginsituatie gegeven is door de matrix $B = \begin{bmatrix} 800\,000 \\ 1200\,000 \end{bmatrix}$

<u>OEFENING</u>

Bereken de bevolkingsaantallen van Brussel, Mechelen en Antwerpen binnen 9 jaar als de volgende migratie-matrix geldt voor een periode van 3 jaar, dit uitgaande van de bevolkingsaantallen (in duizendtallen): Antwerpen – 55, Mechelen – 98, Brussel – 112.

$$M = \text{naar} \begin{array}{rc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} \text{Ant} & \text{Mech} & \text{Bru} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Antwerpen} \\ \text{Mechelen} \\ \text{Brussel} \end{array} & \begin{bmatrix} 3/5 & 1/10 & 1/10 \\ 1/5 & 4/5 & 3/10 \\ 1/5 & 1/10 & 3/5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Herschrijf de migratie-matrix als volgt: $\begin{array}{rc} & \text{naar} \\ \text{van} & \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/10 & 4/5 & 3/10 \\ 1/10 & 1/10 & 3/5 \end{bmatrix} \end{array}$

Wat is de relatie tussen M en deze matrix?

Gebruik deze laatste matrix om je antwoord te bekomen.

Een matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ noemen we de getransponeerde matrix van $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ als $\forall\, i \in \{1,...,n\}$ en $\forall\, j \in \{1,...,m\}$ geldt dat $b_{ij} = a_{ji}$. B noteren we als A^T .

Waaraan denk je dat de getransponeerde van het product van twee matrices gelijk is?
$(P \cdot Q)^T =$......................

2.3.2 Populatie-voorspellingsmatrix of Lesliematrix

Bij een kever-populatie geldt dat

- 50% meer dan 1 jaar wordt,
- 1/3 meer dan 2 jaar en
- geen enkele kever wordt 3 jaar

2-jarige kevers brengen gemiddeld 6 nakomelingen voort. Vertrekkende van 3000 kevers waarbij er 1000 kevers per groep (I: 0-1jaar, II: 1-2 jaar, III: > 2 jaar) zijn, kan het volgend produkt worden opgesteld:

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} . \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Gebruik van insecticides dringt de vruchtbaarheid terug van 6 tot 3. Bepaal hiervan de invloed.

Hoe stel je een Lesliematrix op voor n groepen?

1^e^ rij: vruchtbaarheid van elke groep

2^e^ rij: 1^e^ kolom = overlevingskans, promotiekans voor volgende groep en alle andere elementen nul

3^e^ rij: 2^e^ kolom = kans om van 2^e^ naar 3^e^ groep te gaan en alle andere elementen nul.

4^e^ rij: 3^e^ kolom = kans om van 3^e^ naar 4^e^ groep te gaan en alle andere elementen nul.

$\vdots$

$$A = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & ... & v_{n-1} & v_n \\ p_0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

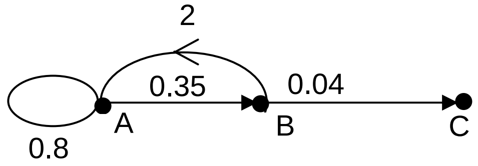
OEFENINGEN

a. Een populatie bestaat uit leeftijdsklassen van 15 dagen. Geen enkel individu wordt 90 dagen. Voortplanting is er tussen de 30ste en 75ste levensdag ($v_0 = v_1 = v_5 = 0$) met $v_2 = 4$, $v_3 = 10$ en $v_4 = 4$. De eerste 15 dagen sterft 50% van de dieren, 75% gaat van de 2e naar de 3e groep en eveneens 75% gaat van de 3e naar de 4e groep. Slechts 33% gaat van de 4e naar de 5e groep en tenslotte gaat er 25% van de 5e naar de 6e groep.

   Bepaal de Lesliematrix.

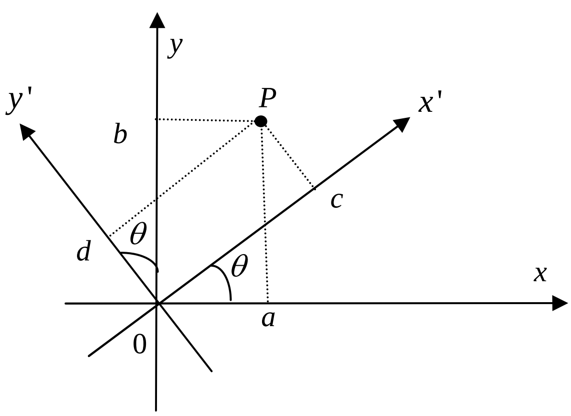
b. Voor drie even grote groepen van 1000 (jongeren, volwassenen, ouderen) gelden volgende regels: $v_0 = 0{,}1$, $v_1 = 0{,}5$, $v_2 = 0{,}01$ en $p_0 = 0.5$, $p_1 = 0.25$.
   Hoe evolueert deze populatie in de eerste 4 jaren? Hoe is de verdeling na 10 jaar?

c. In een populatie kunnen 3 generaties onderscheiden worden. De periode van de graaf is de lengte van 1 generatie. Stel de populatievoorspellingsmatrix of Lesliematrix op en bepaal het aantal van elke generatie na 5 periodes. De beginsituatie is 100, 60, 50.



2.4 Matrices en lineaire transformaties in het vlak

Uitgewerkt voorbeeld van een rotatie (= draaiing) met centrum 0 en hoek θ .



Zij $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de orthonormale basis van $x0y$ en $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ een orthonormale basis van $x'0y'$.
(a,b) zijn de coördinaten van P t.o.v. $x0y$ en (c,d) t.o.v. $x'0y'$.

Daar $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta$ en $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ geldt:

$$\vec{e}_1{}' = \cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2 \quad \text{en} \quad \vec{e}_2{}' = -\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2$$

Dit geeft de volgende overgangsmatrix: $S = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Voor P geldt dat $P = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$.   (1)

Anderzijds geldt dat:

$$\begin{aligned} P &= c \cdot \vec{e}_1\,' + d \cdot \vec{e}_2\,' \\ &= c \cdot (\cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2) + d \cdot (-\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2) \\ &= (c \cdot \cos\theta - d \cdot \sin\theta) \cdot \vec{e}_1 + (c \cdot \sin\theta + d \cdot \cos\theta) \cdot \vec{e}_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Uit (1) en (2) volgt dat $a = c \cdot \cos\theta - d \cdot \sin\theta$ en $b = c \cdot \sin\theta + d \cdot \cos\theta$.

In matrixnotatie geeft dit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

En na links vermenigvuldigen met S^{-1}: $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

- Verklaar waarom S een inverse heeft en bereken de inverse.
- Stel de matrix op van een spiegeling t.o.v. de x-as.
- Bepaal de matrix na 2 opeenvolgende rotaties over θ.

3 Matrices en het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen met de TI-83/84 Plus

Stelsel van lineaire vergelijkingen kunnen op een eenvoudige manier opgelost worden door te steunen op matrices en gebruik te maken van de grafische rekenmachine.

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

<u>VOORBEELD 1</u>

We lossen het volgende stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden op.

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 3x + y - z = 6 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} \qquad \text{In matrixnotatie: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vergelijk $AX = B$ met $a\,x = b$ in $\mathbb{R}$ met A een vierkante matirx. De laatste vergelijking is eenvoudig oplosbaar indien $a \neq 0$, nl. $x = a^{-1}b = \dfrac{b}{a}$.

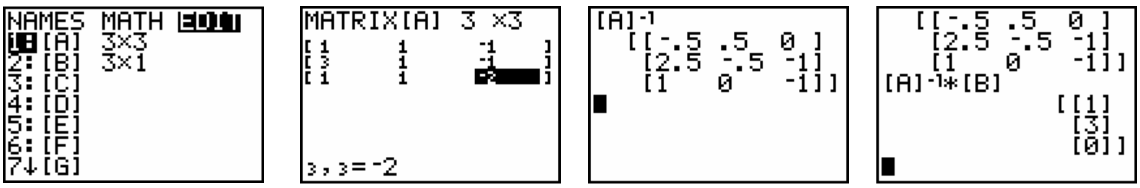
Bij matrices is dit niet zo eenvoudig.

Enkel als A regulier (A^{-1} bestaat) is, vind je analoog dat $X = A^{-1}B\,(\neq BA^{-1})$.

Je kan A^{-1} bepalen met elementaire rijoperaties: $\left[A \mid I_n\right] \to \left[I_n \mid Q\right]$ waarbij $Q = A^{-1}$. Maar gebruikmakend van de grafische rekenmachine spaart heel wat elementair rekenwerk.

Met de TI-83/84 Plus kan je met `2nd[MATRIX]` een matrix invoeren. Je geeft eerst de dimensies in en dan de elementen van de matrix. Met `2nd[QUIT]`, kom je weer in het hoofdscherm waar je met `2nd[MATRIX]`de juiste matrix uit de lijst haalt.

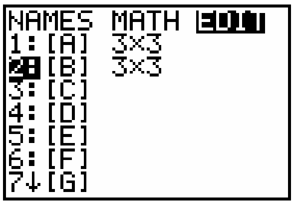
Via `[x⁻¹]` bereken je de inverse matrix.

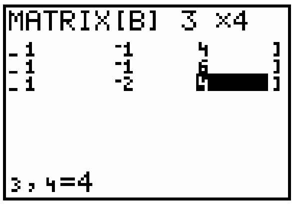


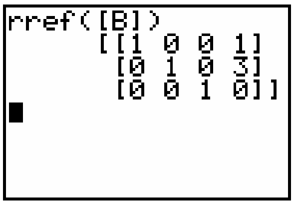
Door op analoge wijze de kolommatrix B in te geven, kan je het stelsel oplossen door $A^{-1}B$ te berekenen.

Om automatisch te herleiden naar een trapvorm met de rekenmachine, geef je eerst uitgebreide matrix in met `2nd[MATRIX]`. Verlaat het invoerscherm, `2nd[QUIT]`.

Kies in het MATH-menu van `2nd[MATRIX]` voor `B:rref(` en selecteer de juiste matrix. Met `[ENTER]` wordt de matrix herleid tot een gereduceerde trapvorm.







Met biede methodes bekom je dat: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>VOORBEELD 2</u>

Beschouw het onderstaande stelsel van vier vergelijkingen en drie onbekenden.

$$\begin{cases} x+y-z = 4 \\ 3x+y-z = 6 \\ x+y-2z = 4 \\ 3x+2y-z=9 \end{cases}$$

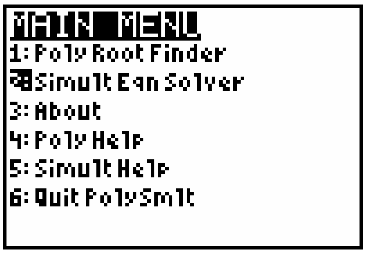
In matrixnotatie: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

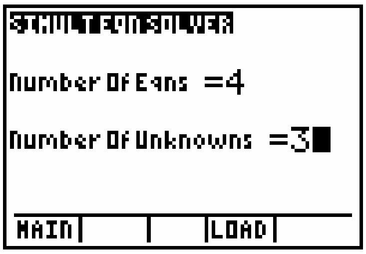
Dit stelsel is niet op te lossen gebruikmakend van de matrix A^{-1}. Het commando `rref` biedt wel een oplossing.

Je kunt dit stelsel ook oplossen via de Flash-applicatie *Polynomial Root Finder and Simultaneous Equation Solver (PolySmlt)* die gratis te downloaden is via <u>education.ti.com</u>. Het betreft een applicatie om vergelijkingen en stelsels op te lossen.

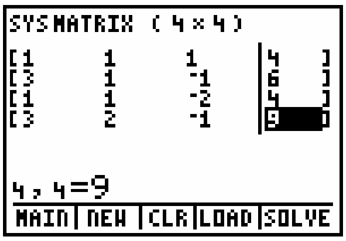
Een handleiding vind je via <u>education.ti.com/guides</u>.

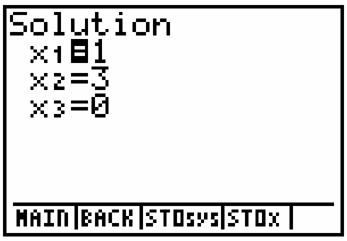
Eens de applicatie gedownload is en op naar je rekenmachine geïnstalleerd, activeer je de applicatie via `[APPS] 2:Simult Eqn Solver`. Geef het aantal vergelijkingen en onbekenden in en bevestig met `[ENTER]`.

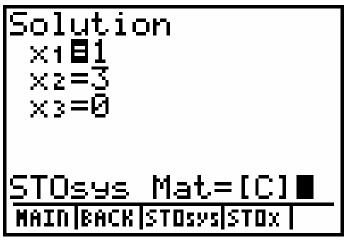




Geef dan alle coëfficiënten in en druk op `[SOLVE](F5)`.





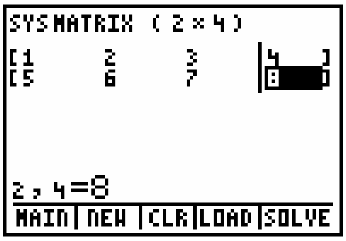


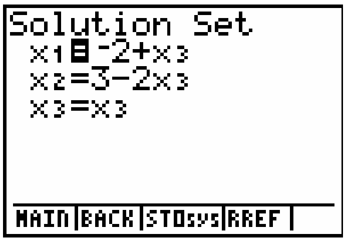
Met behulp van [STOsys](F3)kan je de coëfficiëntenmatrix opslaan in een matrix naar keuze. Geef met 2nd[MATRIX] een matrix aan die nog niet gedefinieerd is. Met behulp van [STOx](F4) kan je analoog de uitkomstenmatrix bewaren.

Je verlaat de applicatie met 2nd[QUIT].

<u>*VOORBEELD 3*</u>

De applicatie *PolySmlt* lost het stelsel $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 5x+6y+7z=8 \end{cases}$ als volgt op.





In dit geval kan ook de bijhorende gereduceerde trapvorm getoond (RREF) en bewaard (STORE RREF) worden.