

Vectorruimten



Machteld Verhenne

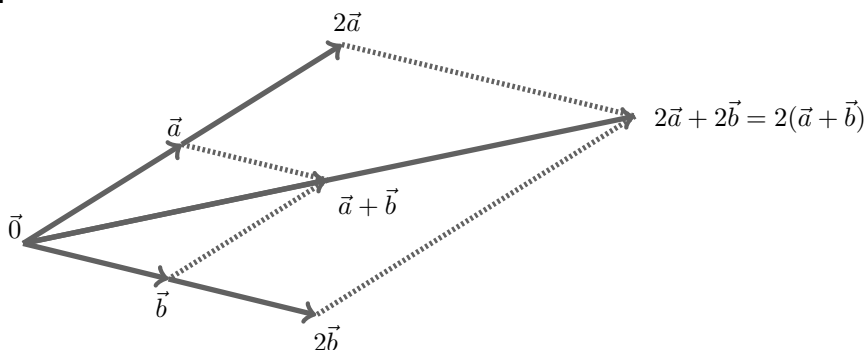
Inhoudstafel

1 Definitie en rekenregels	2
1.1 Definitie	2
1.2 Rekenregels	3
1.3 Lineaire combinatie	5
2 Deelvectorruimten	6
2.1 Definitie	6
2.2 Criterium	6
2.3 Voorbeelden	7
2.4 Doorsnede van deelvectorruimten	9
2.5 Opspanning van een deelverzameling	9
3 Vrije deelverzamelingen	12
3.1 Lineair onafhankelijke vectoren en verzamelingen	12
3.2 Eigenschappen	13
4 Voortbrengende deelverzamelingen	16
4.1 Voorbeelden en definitie	16
4.2 Eigenschappen	16
5 Basis en dimensie	19
5.1 Definitie en eigenschappen basis	19
5.2 Voorbeelden en coördinaten	21
5.3 Som van deelvectorruimten	22
5.4 Dimensiestelling	23
6 Lineaire afbeeldingen	26
6.1 Definitie en voorbeelden	26
6.2 Eigenschappen	27
6.3 Matrix en vergelijkingen	27
6.4 Beeld en kern van een lineaire afbeelding	29
6.5 Isomorfismen	32
7 Eigenwaarden en eigenvectoren	35
7.1 Lineaire transformaties	35
7.2 De stelling van het alternatief	36
7.3 Eigenwaarden en eigenvectoren	36
7.4 Lineair onafhankelijke eigenvectoren	39
8 Herhalingsoefeningen	40
8.1 Definitie en rekenregels	40
8.2 Deelvectorruimten	40
8.3 Vrije deelverzamelingen	41
8.4 Voortbrengende deelverzamelingen	41
8.5 Basis en dimensie	41
8.6 Lineaire afbeeldingen	42
8.7 Eigenwaarden en eigenvectoren	42

1 Definitie en rekenregels

1.1 Definitie

Vectoren in het vlak kunnen we optellen en vermenigvuldigen met een getal. Ook geldt bijvoorbeeld de distributiviteit.



Een **reële vectorruimte** $\mathbb{R}, V, +$ is een niet-lege verzameling V , waarbij we

1 twee elementen van V kunnen optellen en

2 van een element van V een veelvoud kunnen nemen.

Deze bewerkingen voldoen aan de volgende eigenschappen:

i) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w} \in V$

optelling is inwendig

ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

optelling is associatief

iii) $\exists \vec{0} \in V : \forall \vec{v} \in V : \vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$

er bestaat een neutraal element voor +

iv) $\forall \vec{u} \in V : \exists \vec{u}' \in V : \vec{u} + \vec{u}' = \vec{0} = \vec{u}' + \vec{u}$

elk element heeft een symmetrisch element

v) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

optelling is commutatief

vi) $\forall r \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V : r \cdot \vec{v} \in V$

scalaire vermenigvuldiging is inwendig

vii) $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V : (r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v}$

scalaire vermenigvuldiging is gemengd associatief

viii) $\forall \vec{v} \in V : 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

1 is het neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging

ix) $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V : (r + s) \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{v} \text{ en } r \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = r \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w}$

distributiviteit van de optelling t.o.v. de scalaire vermenigvuldiging

Omwille van eigenschappen (i) t.e.m. (iv) is $V, +$ een **groep**.

Als ook eigenschap (v) geldt, dan is $V, +$ een **commutatieve groep**.

1. Vormen de volgende verzamelingen voorzien van de gegeven bewerking een commutatieve groep?

(a) $\mathbb{N}, +$

(d) $\mathbb{R}, \cdot$

(g) $\mathbb{R}, +$

(b) $\mathbb{Z}, +$

(e) $\mathbb{Q}, +$

(h) $\mathbb{R}, -$

(c) $\mathbb{Z}, \cdot$

(f) $\mathbb{R}_0, \cdot$

Voorbeelden van vectorruimten:

$\mathbb{R}, \pi_0, +$	De vectoren in het vlak π_0 dat de oorsprong bevat.
$\mathbb{R}, S_0, +$	De vectoren in de ruimte S_0 dat de oorsprong bevat.
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$	$\mathbb{R}^2$ is de verzameling van de geordende tweetallen.
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$	$\mathbb{R}^3$ is de verzameling van de geordende drietallen.
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +$	$\mathbb{R}^n$ is de verzameling van de geordende n-tallen.
$\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +$	$\mathbb{R}[x]$ is de verzameling van de veeltermen.
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 2}, +$	$\mathbb{R}^{2 \times 2}$ is de verzameling van de 2 x 2 matrices.
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is de verzameling van de rijen (a_i) .
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ is de verzameling van de afbeeldingen. ¹

2. We definiëren $\mathbb{P}X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ met als som: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 - 1 \end{pmatrix}$ en scalaire vermenigvuldiging: $r \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx + r - 1 \\ ry - r + 1 \end{pmatrix}$. Toon aan dat $\mathbb{P}X, +$ een vectorruimte is.

3. Gegeven zijn de vectoren in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \vec{v} = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ en $\vec{w} = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$

(a) Bereken $3\vec{w} + \vec{v}$

(b) Geef de tegengestelde vector van $\vec{w}$

(c) Toon aan: $\forall r, s \in \mathbb{R} : r\vec{v} + s\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow r = s = 0$

1.2 Rekenregels

(a) $\forall \vec{a} \in V : 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Bewijs.

$0 \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} + \vec{0}$	$\vec{0}$ is het neutraal element voor de optelling in V
$= 0 \cdot \vec{a} + (\vec{a} + (-\vec{a}))$	definitie symmetrisch element voor de optelling in V
$= (0 \cdot \vec{a} + \vec{a}) + (-\vec{a})$	1 is neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging
$= (0 + 1) \cdot \vec{a} + (-\vec{a})$	distributiviteit van $+$ t.o.v. de scalaire vermenigvuldiging
$= 1 \cdot \vec{a} + (-\vec{a})$	1 is het neutraal element voor de optelling in $\mathbb{R}$
$= \vec{a} + (-\vec{a})$	1 is neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging
$= \vec{0}$	definitie symmetrisch element voor de optelling in V

□

¹Een afbeelding binnen $\mathbb{R}$ is een functie waarbij het domein ook $\mathbb{R}$ is.

(b) $\forall r \in \mathbb{R} : r \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Bewijs.

$$\begin{aligned} r \cdot \vec{0} &= r \cdot (\vec{a} - \vec{a}) && \vec{0} \text{ is neutraal element voor de optelling in } V \\ &= r\vec{a} - r\vec{a} && \text{distributiviteit van scalaire verm. t.o.v. de optelling} \\ &= \vec{0} && \vec{0} \text{ is neutraal element voor de optelling in } V \end{aligned}$$

□

(c) $\forall r \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \in V : r\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow r = 0 \vee \vec{a} = \vec{0}$

Bewijs.

$\Leftarrow$:

$$\begin{aligned} r = 0 &\Rightarrow 0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{0} &\Rightarrow r \cdot \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$:

Zij $r \in \mathbb{R}$, er geldt dat $r = 0$ of $r \neq 0$.

Indien $r = 0$, is het bewezen.

Beschouw nu $r \neq 0$.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 1 \cdot \vec{a} && \text{neutraal element} \\ &= \left(\frac{1}{r} \cdot r\right) \vec{a} && \text{symmetrisch element voor de vermenigvuldiging in } \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{r} \cdot (r \cdot \vec{a}) && \text{associativiteit van de scalaire vermenigvuldiging} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \vec{0} && \text{gegeven} \\ &= \vec{0} && \text{rekenregel 2} \end{aligned}$$

□

(d) $\forall \vec{a} \in V : (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} = 1 \cdot (-\vec{a})$

Bewijs.

$$\begin{aligned} * -\vec{a} &= 1 \cdot (-\vec{a}) && 1 \text{ is neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging} \\ * (-1) \cdot \vec{a} + \vec{a} &= (-1 + 1) \cdot \vec{a} && \text{distributieve eigenschap} \\ &= 0 \cdot \vec{a} && \text{symmetrisch element van de optelling in } \mathbb{R} \\ &= \vec{0} && \text{rekenregel 1} \\ &\Downarrow \\ (-1) \cdot \vec{a} &= -\vec{a} \end{aligned}$$

□

$$(e) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{a} + \vec{c} \\ \Downarrow \text{bij beide leden } -\vec{a} \text{ optellen} \\ -\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} &= -\vec{a} + \vec{a} + \vec{c} \\ \Downarrow \text{symmetrisch element voor de optelling} \\ \vec{0} + \vec{b} &= \vec{0} + \vec{c} \\ \Downarrow \vec{0} \text{ is neutraal element voor de optelling} \\ \vec{b} &= \vec{c} \end{aligned}$$

□

1.3 Lineaire combinatie

Een som van vectoren van de verzameling V en een veelvoud van een vector uit V is terug een vector van V .

Stel $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ en $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ dan is $\vec{v} = r_1 \vec{v}_1 + r_2 \vec{v}_2 + \dots + r_n \vec{v}_n$ een **lineaire combinatie** van de vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Eigenschappen:

1. Een lineaire combinatie van een lineaire combinatie van vectoren is een lineaire combinatie van deze vectoren.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= -3 \vec{a} + 4 \vec{b} \\ \vec{y} &= 2\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\vec{x} - 2\vec{y} &= 4 \begin{pmatrix} -3 \vec{a} + 4 \vec{b} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \vec{a} - \vec{b} \end{pmatrix} \\ &= -12 \vec{a} + 16 \vec{b} - 4 \vec{a} + 2\vec{b} \\ &= -16 \vec{a} + 18 \vec{b} \end{aligned}$$

2. Een vector kan soms op verschillende manieren als lineaire combinatie geschreven worden.

Bijvoorbeeld: vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$

$(2, 1)$ is een lineaire combinatie van $(0, 2)$, $(3, 0)$ en $(8, 4)$:

$$(2, 1) = 0 \cdot (0, 2) + 0 \cdot (3, 0) + \frac{1}{2}(8, 4)$$

of ook

$$(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot (0, 2) + \frac{1}{3} \cdot (3, 0) + 0 \cdot (8, 4)$$

4. Kan je $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ als lineaire combinatie van $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ schrijven?

2 Deelvectorruimten

2.1 Definitie

$\mathbb{R}, W, +$ is een **deelvectorruimte** van $\mathbb{R}, V, +$ als en slechts als $\mathbb{R}, W, +$ is een vectorruimte en $W \subset V$.

Voorbeeld: $\mathbb{R}, \pi_0, +$ is een deelvectorruimte van $\mathbb{R}, S_0, +$

2.2 Criterium

$\mathbb{R}, W, +$ is een deelvectorruimte van $\mathbb{R}, V, +$ met $W \neq \emptyset$

 $\Downarrow$

$\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in W : r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \in W$

Bewijs.

1) $\mathbb{R}, W, +$ is een deelvectorruimte van $\mathbb{R}, V, + \Rightarrow \forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in W : r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \in W$

In een vectorruimte is de scalaire vermenigvuldiging een interne bewerking, dus:

$$\forall r, \forall \vec{v} \in W : r \cdot \vec{v} \in W \text{ en } \forall s \in \mathbb{R}, \forall \vec{w} \in W : s \cdot \vec{w} \in W$$

$\Downarrow$ de optelling is een interne bewerking in een vectorruimte

$$\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in W : r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \in W$$

2) $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in W : r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \in W \Rightarrow \mathbb{R}, W, +$ is een deelvectorruimte van $\mathbb{R}, V, +$

Kies $r = s = 1 : \forall \vec{v}, \vec{w} \in W : 1 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \in W$.

Dus de optelling is inwendig in W .

Kies $s = 0 : \forall \vec{v}, \vec{w} \in W : r \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w} = r \vec{v} \in W$.

Dus de scalaire vermenigvuldiging is inwendig in W .

We verifiëren de eigenschappen van een vectorruimte (zie definitie).

Eigenschappen (ii), (v), (vii), (viii) en (ix) gelden automatisch omdat $W \subset V$.

(iii) Kies $r = s = 0 : 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w} = \vec{0} \in W$

Aangezien $W \subset V$ is ook $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}, \forall \vec{v} \in W$

(iv) Kies $r = -1$ en $s = 0 : (-1) \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w} = -\vec{v} \in W$

Aangezien $W \subset V$ is ook $\vec{v} + (-1) \vec{v} = \vec{0}, \forall \vec{v} \in W$

□

2.3 Voorbeelden

- De vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$

1. $W = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 $(x, 1)$ en $(y, 1) \in W$:
 $(x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin W$

W is geen deelvectorruimte.

2. $W = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall (x, 0), (y, 0) \in W : r \cdot (x, 0) + s \cdot (y, 0) = (rx, 0) + (sy, 0) = (rx + sy, 0) \in W$

W is een deelvectorruimte.

3. $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 0\}$
 Geldt $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W : r(x_1, y_1) + s(x_2, y_2) \in W$?

$$\begin{aligned} 3x_1 - y_1 = 0 \text{ en } 3x_2 - y_2 = 0 \\ \Downarrow \\ r(3x_1 - y_1) + s(3x_2 - y_2) = 0 \\ \Downarrow \\ 3rx_1 + 3sx_2 - ry_1 - sy_2 = 0 \\ \Downarrow \\ 3(rx_1 + sx_2) - (ry_1 + sy_2) = 0 \end{aligned}$$

Dus $(rx_1 + sx_2, ry_1 + sy_2) \in W$.
 W is een deelvectorruimte.

4. $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 4\}$

$$x_1 + 4 - y_1 = 0 \text{ en } x_2 + 4 - y_2 = 0$$

$$r(x_1 + 4) + s(x_2 + 4) - (ry_1 + sy_2) = 0 \Rightarrow (rx_1 + sx_2, ry_1 + sy_2) \notin W$$

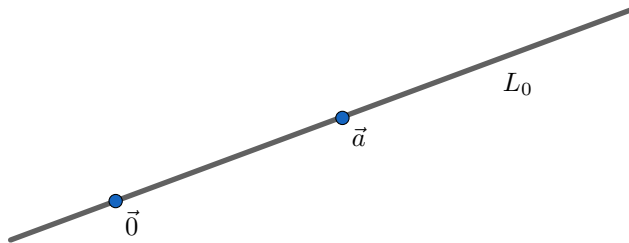
W is geen deelvectorruimte.

• De ruimte S_0

a. Vectorvlakken



b. Vectorrechten $L_0 = \mathbb{R} \vec{a}$



c. $\{\vec{0}\}$

d. S_0

5. Zijn de volgende verzamelingen deelvectorruimten in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$?

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{7}\}$

6. Zijn de volgende verzamelingen deelvectorruimten in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +$?

(a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}$

(b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0 \text{ of } x_2 = 0\}$

(c) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 0\}$

(d) $D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 1\}$

2.4 Doorsnede van deelvectorruimten

De doorsnede van twee deelvectorruimten is een deelvectorruimte.

Bewijs. Stel A en B zijn deelvectorruimten van $\mathbb{R}, V, +$

$\forall \vec{v}, \vec{w} \in A \cap B, \forall r, s \in \mathbb{R}:$

$$\vec{v}, \vec{w} \in A \cap B$$

$\Downarrow$

$$\vec{v}, \vec{w} \in A$$

$\Downarrow$

$$r \vec{v} + s \vec{w} \in A$$

criterium deelvectorruimte

$\Downarrow$

$$r \vec{v} + s \vec{w} \in A \cap B$$

$\Downarrow$

criterium deelvectorruimte

$A \cap B$ is ook een vectorruimte

$$\vec{v}, \vec{w} \in A \cup B$$

$\Downarrow$

$$\vec{v}, \vec{w} \in B$$

$\Downarrow$

$$r \vec{v} + s \vec{w} \in B$$

□

Voorbeeld:

α_0 en β_0 zijn twee verschillende vlakken in de ruimte die $\vec{0}$ bevatten. $\alpha_0 \cap \beta_0 = L_0$

$\mathbb{R}, \alpha_0, +$ en $\mathbb{R}, \beta_0, +$ zijn de deelvectorruimten van $\mathbb{R}, S_0, +$

$\mathbb{R}, L_0, +$ is ook een deelvectorruimte.

2.5 Opspanning van een deelverzameling

Zij $\mathbb{R}, V, +$ een vectorruimte en $D = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$.

De **opspanning** van een deelverzameling D is de verzameling van alle lineaire combinaties van D .

Notatie: $\text{Span } D$

$$\text{Span}^2 D = \{r_1 \vec{v}_1 + r_2 \vec{v}_2 + \dots + r_n \vec{v}_n : r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}\}$$

Voorbeelden:

- $\text{Span}\{(1, 1, 1)\} = \{r(1, 1, 1) : r \in \mathbb{R}\} = \{(r, r, r) : r \in \mathbb{R}\}$
- $\text{Span}\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\} = \{r(1, 1, 1) + s(0, 1, 2) : r, s \in \mathbb{R}\} = \{(r, r+s, r+2s) : r, s \in \mathbb{R}\}$

7. Gegeven: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +$

Geldt $(3, 9, -4, -2) \in \text{Span}\{(1, -2, 0, 3), (2, 3, 0, -1), (2, -1, 2, 7)\}$?

8. Gegeven: $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +$

Behoort $-5x^2 + 6x + 14$ tot $\text{Span}\{x^2 + 3x - 4, -x^2 + 2x + 6, 2x^2 + 4\}$?

9. Gegeven: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$

Noteer $\text{Span}\{(2, 0, 3), (-1, 1, 0)\}$

²Een synoniem voor $\text{Span } D$ is $\text{vct } D$ = de vectorruimte die ontstaat door alle lineaire combinaties van vectoren van D te nemen.

Hoofdeigenschap van de opspanning van vectoren

$\mathbb{R}, V, +$ is een vectorruimte met $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$, dan geldt:

- a) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$
- b) $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ is een deelvectorruimte van V
- c) W een deelvectorruimte is van V en $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset W \Rightarrow \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset W$

Bewijs.

a) $\vec{v}_1 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n$

$$\vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n$$

$\vdots$

$$\vec{v}_n = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 1 \cdot \vec{v}_n$$

De vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ kunnen als een lineaire combinatie van $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ geschreven worden. Ze behoren dus tot $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

b) $\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}, \forall r, s \in \mathbb{R} :$

$$r\vec{w}_1 + s\vec{w}_2 =$$

$$\Downarrow \vec{w}_1 = r_1 \vec{v}_1 + r_2 \vec{v}_2 + \dots + r_n \vec{v}_n \quad (\text{gegeven})$$

$$\vec{w}_2 = s_1 \vec{v}_1 + s_2 \vec{v}_2 + \dots + s_n \vec{v}_n$$

$$= r(r_1 \vec{v}_1 + r_2 \vec{v}_2 + \dots + r_n \vec{v}_n) + s(s_1 \vec{v}_1 + s_2 \vec{v}_2 + \dots + s_n \vec{v}_n)$$

$$= (rr_1 + ss_1) \vec{v}_1 + (rr_2 + ss_2) \vec{v}_2 + \dots + (rr_n + ss_n) \vec{v}_n$$

$$\Downarrow (rr_1 + ss_1), (rr_2 + ss_2), \dots, (rr_n + ss_n) \in \mathbb{R}$$

$$r\vec{w}_1 + s\vec{w}_2 \text{ is een lineaire combinatie van } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

$\Downarrow$

$$r\vec{w}_1 + s\vec{w}_2 \in \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

$\Downarrow$ criterium deelvectorruimte

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \text{ is deelvectorruimte}$$

- c) Als W een deelvectorruimte van V is en $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset W$ dan is $\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset W$. Dit volgt uit de definitie van opspanning en deelvectorruimte.

□

Gelijkheid van opspanning

Zij $\mathbb{R}, V, +$ een vectorruimte met $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ en $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \in V$.

$$\text{Span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} = \text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \}$$

Bewijs.

$\Rightarrow$:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \text{Span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \quad (\text{hoofdeigenschap deel a})$$

$$\Downarrow \quad \text{gegeven: } \text{Span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} = \text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \}$$

$$\text{Analoog voor } \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \in \text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \}$$

$\Leftarrow$:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \}$$

$$\Downarrow \quad (\text{hoofdeigenschap deel b})$$

$$\text{Span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \text{ is een deelvectorruimte van } \text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \} \quad (1)$$

$$\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \in \text{Span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$$

$$\Downarrow \quad (\text{hoofdeigenschap deel b})$$

$$\text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \} \text{ is een deelvectorruimte van } \text{Span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \quad (2)$$

$$\text{Uit (1) en (2) volgt: } \text{Span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} = \text{Span} \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m \}$$

□

10. Toon aan:

$$(a) \text{Span} \{ 1 + X, 1 - X \} = \text{Span} \{ 1, X \}$$

$$(b) \text{Span} \{ 1 + 2X - X^2, 3 + X - X^2, 4 + X^2 \} = \text{Span} \{ 1, X, X^2, X - 2X^2 \}$$

3 Vrije deelverzamelingen

3.1 Lineair onafhankelijke vectoren en verzamelingen

Is $(-4, 8)$ een lineaire combinatie van $(3, 5)$ en $(10, 2)$?

$$\begin{aligned} (-4, 8) &= a(3, 5) + b(10, 2) \\ &= (3a + 10b, 5a + 2b) \end{aligned}$$

Dit leidt tot het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} 3a + 10b = -4 & (1) \\ 5a + 2b = 8 & (2) \end{cases}$$

We lossen dit stelsel op door vergelijking (1) met 5 en (2) met -3 te vermenigvuldigen :

$$\begin{cases} 5 \cdot (3a + 10b) = 5 \cdot (-4) & (3) \\ -3 \cdot (5a + 2b) = -3 \cdot 8 & (4) \end{cases}$$

We tellen vergelijkingen (3) en (4) op:

$$\begin{aligned} 15a + 50b - (15a + 6b) &= -20 - 24 \\ 44b &= -44 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

We substitueren $b = -1$ terug in vergelijking (1):

$$\begin{aligned} 3a + 10(-1) &= -4 \\ 3a - 10 &= -4 \\ 3a &= 6 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Dus, $(-4, 8) = 2(3, 5) - 1(10, 2)$.

$(-4, 8)$ is dus een lineaire combinatie van $(3, 5)$ en $(10, 2)$.

Is $(1, 2, 3)$ een lineaire combinatie van $(5, 0, 6)$ en $(7, 0, 8)$? Nee

$\vec{v}$ is **lineair afhankelijk** van $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ als en slechts als $\vec{v}$ een lineaire combinatie is van $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$

Symbolisch:

$\vec{v}$ is lineair afhankelijk van $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R} : \vec{v} = k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_n \vec{a}_n$

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is een **vrije of lineair onafhankelijke verzameling** als en slechts als geen enkel element een lineaire combinatie van de andere elementen is.

Een vrije verzameling is dus een verzameling van lineair onafhankelijke vectoren.

3.2 Eigenschappen

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is een vrije verzameling als en slechts als de enige lineaire combinatie van $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ die gelijk is aan de nulvector de triviale combinatie is.

Symbolisch:

$$\begin{aligned} \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \text{ is een vrije verzameling} \\ \Updownarrow \\ k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0 \end{aligned}$$

Bewijs.

$\Rightarrow$:

Veronderstel dat er een niet-triviale combinatie van de vrije verzameling $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ bestaat die gelijk is aan de nulvector:

$$\begin{aligned} k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{met} \quad \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : k_i \neq 0 \\ \Downarrow \\ \vec{a}_i = \frac{-k_1\vec{a}_1 - k_2\vec{a}_2 - \dots - k_n\vec{a}_n}{k_i} \end{aligned}$$

$\vec{a}_i$ is een lineaire combinatie van de andere elementen van $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$.

Dit is strijdig met het gegeven dat $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ een vrije verzameling is.

Dus enkel de triviale lineaire combinatie van $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is gelijk aan de nulvector.

$\Leftarrow$:

Veronderstel dat $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ geen vrije verzameling is. Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} \vec{a}_i = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_n\vec{a}_n \\ \Downarrow \\ 1 \cdot \vec{a}_i - k_1\vec{a}_1 - k_2\vec{a}_2 - \dots - k_n\vec{a}_n = \vec{0} \end{aligned}$$

Dit is een niet-triviale lineaire combinatie van $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ die gelijk is aan de nulvector.

Dit is strijdig met het gegeven.

Dus $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is een vrije verzameling. □

Een deelverzameling van een vrije verzameling is ook vrij.

Gegeven: $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is vrij.

Te bewijzen: $D = \{\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is vrij.

Bewijs.

Veronderstel dat D niet vrij is.

$$\exists k_i \in \{k_2, k_3, \dots, k_n\} : k_i \neq 0$$

$$k_2 \vec{a}_2 + k_3 \vec{a}_3 + \dots + k_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

$\Downarrow$

$$0 \cdot \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + k_3 \vec{a}_3 + \dots + k_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Wegens $k_i \neq 0$ is dit een niet-triviale combinatie van A .

Dit is strijdig met het gegeven dat A een vrije verzameling is.

Dus $D = \{\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is ook een vrije verzameling. □

Als je aan een vrije verzameling A een element toevoegt dat geen lineaire combinatie van de elementen van A is, dan behoud je een vrije verzameling.

Gegeven: $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is vrij en $\vec{a}$ is geen lineaire combinatie van $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$.

Te bewijzen: $A \cup \{\vec{a}\}$ is vrij.

Bewijs.

Veronderstel dat $A \cup \{\vec{a}\}$ niet vrij is.

$$\exists k, k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}, \text{ niet alle } 0 : \quad (1)$$

$$k\vec{a} + k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad (2)$$

Geval 1: $k = 0$

Uit (2) volgt:

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

Wegens (1), is dit een niet-triviale combinatie.

Hieruit volgt dat A niet vrij is.

Dit is strijdig met het gegeven.

Geval 2: $k \neq 0$

$$\vec{a} = \frac{k_1}{k}\vec{a}_1 + \frac{k_2}{k}\vec{a}_2 + \dots + \frac{k_n}{k}\vec{a}_n$$

$\vec{a}$ is een lineaire combinatie van A .

Dit is strijdig met het gegeven.

Dus $A \cup \{\vec{a}\}$ is vrij. □

11. Is D een vrije verzameling van V ?

(a) $V = \mathbb{R}^3$ en $D = \{(2, -1, 3), (0, 4, 1)\}$

(b) $V = \mathbb{R}^3$ en $D = \{(1, 0, 7), (2, 1, -3), (2, 1, -3)\}$

(c) $V = \mathbb{R}_2[x]$ en $D = \{x - 1, x^2\}$

(d) $V = \mathbb{R}_3[x]$ en $D = \{2 - x, x^3, 1 - x^2, 1 + x + x^2, 1\}$

(e) $V = \pi_0$ en $D = \{\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}\}$

(f) $V = \mathbb{R}^3$ en $D = \{(6, 6, -2), (3, 3, -1)\}$

(g) $V = \mathbb{R}^3$ en $D = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

(h) $V = \mathbb{R}^3$ en $D = \{(2, -3, 5), (0, 1, 2), (3, 3, 6), (0, 0, 1)\}$

12. Toon aan dat $V = \{(1, 3, -2, 5), (3, 2, -1, 7), (-3, 5, -4, 1)\}$ een vrije verzameling in de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +$ is.

Kan je aan V een element toevoegen zodat je nog steeds een vrije verzameling verkrijgt?

4 Voortbrengende deelverzamelingen

4.1 Voorbeelden en definitie

13. (a) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$
 $D = \{(-1, 1), (1, 2)\}$
 Is $(3, -5)$ een lineaire combinatie van D ?
 Is (x, y) een lineaire combinatie van D ?

- (b) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$
 $D = \{(1, 2, 0), (-2, 3, 0)\}$
 Is $(5, -2, 1)$ een lineaire combinatie van D ?

D is een **voortbrengende** deelverzameling van V als en slechts als elk element van V een lineaire combinatie is van de elementen van D .

Gevolg: $\text{Span } D = V$

4.2 Eigenschappen

A) Als je aan een voortbrengende deelverzameling een element toevoegt, dan bekom je opnieuw een voortbrengende verzameling.

B) Als je uit een voortbrengende deelverzameling een element weglaat dat een lineaire combinatie van de andere elementen is, dan behoud je een voortbrengende verzameling.

Stelling van Graßmann - Stanitz

Een vrije deelverzameling kan niet meer elementen bevatten dan een voortbrengende deelverzameling.

Bewijs.

We nemen een vrije verzameling met meer elementen dan een voortbrengende verzameling.

Veronderstel $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ is vrij (1)

en $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ is voortbrengend. (2)

↓ eigenschap a)

$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{a}_1\}$ is voortbrengend.

Omdat $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ voortbrengend is, geldt:

$$\vec{a}_1 = k_1 \vec{b}_1 + k_2 \vec{b}_2 \quad (3)$$

↓ k_1 en k_2 zijn niet beide 0, anders zou: $\vec{a}_1 = \vec{0}$

en dit zou in tegenstrijd zijn met het gegeven dat $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ vrij is.

Bijvoorbeeld $k_1 \neq 0$.

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{k_1} \vec{a}_1 - \frac{k_2}{k_1} \vec{b}_2$$

↓ eigenschap b)

$\{\vec{b}_2, \vec{a}_1\}$ is voortbrengend

↓ eigenschap a)

$\{\vec{b}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ is voortbrengend (4)

Omdat $\{\vec{b}_2, \vec{a}_1\}$ voortbrengend is, geldt:

$$\vec{a}_2 = l_1 \vec{b}_2 + l_2 \vec{a}_1 \quad (5)$$

↓ $l_1 \neq 0$

Zou $l_1 = 0$, dan is wegens (4) $\vec{a}_2$ een veelvoud van $\vec{a}_1$.

Dit is tegenstrijdig met $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ is vrij.

$$\vec{b}_2 = \frac{1}{l_1} \vec{a}_2 - \frac{l_2}{l_1} \vec{a}_1$$

↓ eigenschap b) en (4)

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ is voortbrengend

↓ definitie voortbrengende verzameling

$\vec{a}_3$ is een lineaire combinatie van $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$

Dit is tegenstrijdig met de veronderstelling (1) dat $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ vrij is.

□

14. Zijn de volgende verzamelingen voortbrengende verzamelingen van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$?

(a) $\{(1, 2, -1), (2, -3, 2)\}$

(b) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

(c) $\{(4, 1, 3), (-3, 1, 2), (7, 0, 1)\}$

(d) $\{(2, -1, 3), (3, 1, -3), (9, -2, 6), (0, 5, -15)\}$

15. $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b - 2a \\ 0 & 3a - 5c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ is een deelruimte van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 2}, +$.

Bepaal de voortbrengende verzameling van vectoren voor W .

5 Basis en dimensie

5.1 Definitie en eigenschappen basis

Een deelverzameling A van V is een **basis** van $\mathbb{R}, V, +$ als en slechts als A vrij én voortbrengend is.

Elke basis van $\mathbb{R}, V, +$ heeft evenveel elementen.

Bewijs.

Zij $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ een basis van V en $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$ een basis van V .

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is een vrije verzameling en $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$ is een voortbrengende verzameling van V .

↓ stelling van Graßmann - Stamitz

$$n \leq m \quad (1)$$

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ is een voortbrengende verzameling en $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$ is een vrije verzameling van V .

↓ stelling van Graßmann - Stamitz

$$n \geq m \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $n = m$. □

De **dimensie** van een vectorruimte is het aantal elementen van een basis van deze vectorruimte.

Voorbeelden:

- $\dim \pi_0 = 2$
- $\dim S_0 = 3$
- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$
- $\dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = 4$

Als $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n\}$ een basis is van $\mathbb{R}, V, +$ dan kan je elke vector op juist één manier schrijven als een lineaire combinatie van de basisvectoren.

Bewijs.

- Minstens één manier:

Omdat $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ voortbrengend is, kan elke vector $\vec{v} \in V$ geschreven worden als een lineaire combinatie van $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

- Hoogstens één manier:

Veronderstel dat je een vector $\vec{v} \in V$ op twee manieren kunt schrijven als een lineaire combinatie van de basisvectoren:

$$\vec{v} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \dots + k_n\vec{e}_n \text{ en } \vec{v} = l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2 + \dots + l_n\vec{e}_n.$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{0} = (k_1 - l_1)\vec{e}_1 + (k_2 - l_2)\vec{e}_2 + \dots + (k_n - l_n)\vec{e}_n.$$

$$\Downarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \text{ is vrij}$$

$$k_1 - l_1 = 0 \text{ en } k_2 - l_2 = 0 \text{ en } \dots k_n - l_n = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$k_1 = l_1 \text{ en } k_2 = l_2 \text{ en } \dots k_n = l_n.$$

Je kan een vector dus maximaal op één manier als lineaire combinatie van de basisvectoren schrijven.

□

Als je vector van $\mathbb{R}, V, +$ op juist één manier kan schrijven als een lineaire combinatie van $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n\}$, dan is $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n\}$ een **basis** is van $\mathbb{R}, V, +$

Hoofdstelling van basisvectoren

De deelverzameling B van V is een basis van de vectorruimte $\mathbb{R}, V, +$

$$\Updownarrow$$

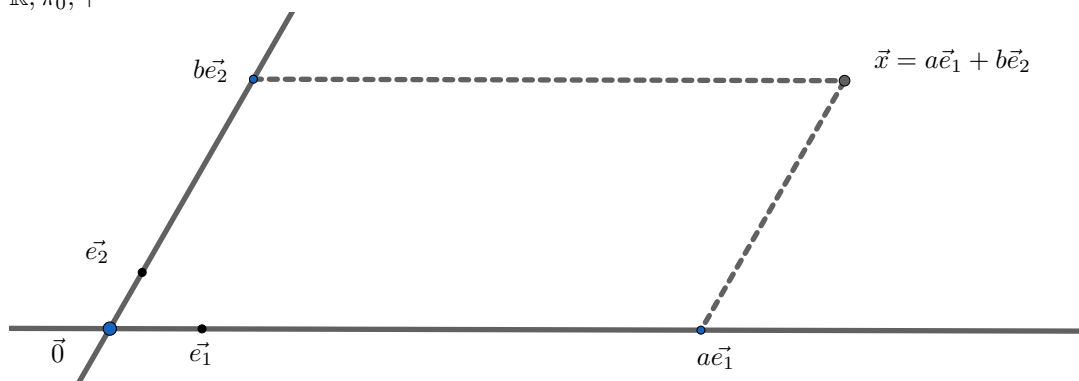
elke vector van V kan op juist één manier geschreven worden als een lineaire combinatie van B

Opmerkingen:

- $\dim \{\vec{0}\} = 0$
- De basis van $\{\vec{0}\}$ bestaat uit nul elementen.
- $\text{Span } \phi = \{\vec{0}\}$

5.2 Voorbeelden en coördinaten

1. $\mathbb{R}, \pi_0, +$



(a, b) zijn de coördinaten van $\vec{x}$ t.o.v. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

2. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ is een basis

$\{(1, 2), (3, 2), (4, 4)\}$ is geen basis want een niet-vrije verzameling

$\{(1, 1), (3, 3)\}$ is geen basis want een niet-vrije verzameling

$\{(1, 2)\}$ is geen basis want een niet-voortbrengende verzameling

3. $\mathbb{R}, \mathbb{R}_2[x], +$

$1, x, x^2$ is een basis

$(5, 7, -1)$ zijn de coördinaten van $-x^2 + 7x + 5$ t.o.v. de basis $1, x, x^2$.

We noteren $co(-x^2 + 7x + 5) = (5, 7, -1)$.

4. $\mathbb{R}, \mathbb{R}_2[x], +$

$\vec{u} = 1 + 5x - x^2$, $\vec{v} = 3 + 16x - 3x^2$, $\vec{w} = 7 - 8x - 8x^2$ Is $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ een basis van $\mathbb{R}, \mathbb{R}_2[x], +$?

Kunnen we een willekeurige vector $a + bx + cx^2$ van $\mathbb{R}_2[x]$, op een unieke manier schrijven als een lineaire combinatie van $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$?

We bepalen een lineaire combinatie van de knadidaat basisvectoren en bekijken of deze combinatie uniek is:

$$a + bx + cx^2 = k(1 + 5x - x^2) + l(3 + 16x - 3x^2) + m(7 - 8x - 8x^2) \text{ met } k, l, m \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} k + 3l + 7m = a \\ 5k + 16l - 8m = b \\ -k - 3l - 8m = c \end{cases}$$

We lossen dit stelsel op m.b.v. matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & a \\ 5 & 16 & -8 & b \\ -1 & -3 & -8 & c \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 152a - 3b + 136c \\ 0 & 1 & 0 & -48a + b - 43c \\ 0 & 0 & 1 & -a - c \end{array} \right)$$

Het stelsel heeft dus een unieke oplossing.

Besluit: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ is een basis van $\mathbb{R}, \mathbb{R}_2[x], +$

5.3 Som van deelvectorruimten

De **som van twee deelvectorruimten** A en B is de vectorruimte voortgebracht door de unie van deze twee deelvectorruimten.

Symbolisch: $A + B = \text{span}(A \cup B)$

Alternatieve eigenschap

$$A + B = \{ \vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in A \wedge \vec{b} \in B \}$$

Bewijs.

Stel $M = \{ \vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in A \wedge \vec{b} \in B \}$.

We bewijzen dat $M = A + B$ door te bewijzen dat $M \subset A + B$ en $A + B \subset M$.

1) $A + B \subset M$

$$\forall \vec{a}_1 + \vec{b}_1, \vec{a}_2 + \vec{b}_2 \in M \quad \forall r, s \in \mathbb{R}:$$

$$r(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + s(\vec{a}_2 + \vec{b}_2) = \underbrace{(r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2)}_{\in A} + \underbrace{(r\vec{b}_1 + s\vec{b}_2)}_{\in B}$$

$\Downarrow$

$$(r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2) + (r\vec{b}_1 + s\vec{b}_2) \in M$$

$\Downarrow$ criterium deelvectorruimte

M is een deelvectorruimte

$$\vec{0} \in B, \forall \vec{a} \in A: \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} \in M \Rightarrow A \subset M \quad (1)$$

$$\vec{0} \in A, \forall \vec{b} \in B: \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} \in M \Rightarrow B \subset M \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $A \cup B \subset M$.

Dus, M is een deelvectorruimte die $A \cup B$ omvat en $A + B$ is de kleinste deelvectorruimte die $A \cup B$ omvat. Dus $A + B \subset M$.

2) $M \subseteq A + B$

$$\begin{aligned} \forall \vec{a} + \vec{b} \in M: \vec{a} \in A &\Rightarrow \vec{a} \in A \cup B \\ \vec{b} \in B &\Rightarrow \vec{b} \in A \cup B \end{aligned}$$

$\vec{a} + \vec{b}$ is een lineaire combinatie van elementen van $A \cup B$

$\Downarrow$

$$\vec{a} + \vec{b} \in \text{span}(A \cup B)$$

$\Downarrow$ definitie $A + B$

$$\vec{a} + \vec{b} \in A + B$$

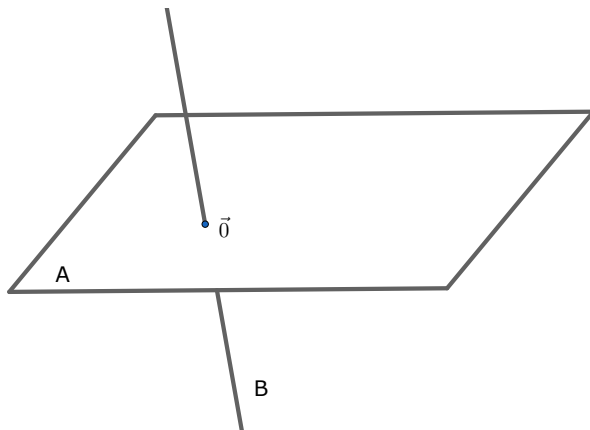
Dus, $M \subseteq A + B$. □

5.4 Dimensiestelling

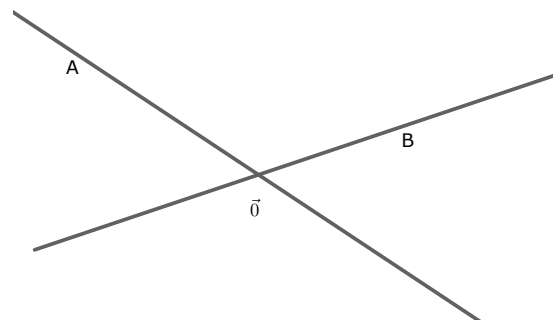
Voorbeeld: A en V zijn deelruimten. Dan zijn $A \cap B$ en $A + B$ ook deelruimten.

Figuur	Dimensie	A	B	$A \cap B$	$A + B$
1					
2					
3					
4					

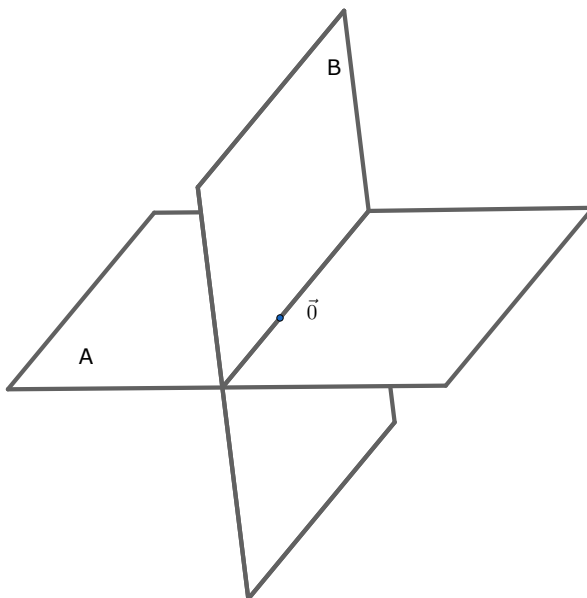
Figuur 1



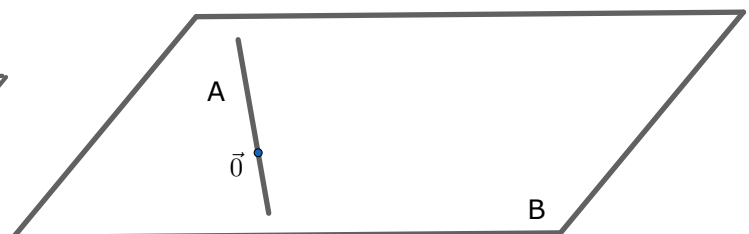
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

Bewijs.

Stel $\dim A = 2$, $\dim B = 3$, $\dim(A \cap B) = 1$.

We moeten dan bewijzen dat $\dim(A + B) = 4$.

$\dim(A \cap B) = 1 \Rightarrow$ de basis van $(A \cap B)$ telt één vector, bijvoorbeeld $\vec{v}_1$

$\dim A = 2 \Rightarrow$ de basis van A telt twee vectoren

$\Downarrow \vec{v}_1 \in A \cap B \subset A$ en $\vec{v}_1$ is lineair onafhankelijk.

We breiden $\{\vec{v}_1\}$ uit tot een basis van A .

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ is een basis van A .

$\dim B = 3 \Rightarrow$ de basis van B telt drie vectoren

$\Downarrow \vec{v}_1 \in A \cap B \subset B$ en $\vec{v}_1$ is lineair onafhankelijk.

We breiden $\{\vec{v}_1\}$ uit tot een basis van B .

$\{\vec{v}_1, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ is een basis van B .

$A + B = \text{span}(A \cup B) = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

$A + B$ wordt dus voortgebracht door $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Om te bewijzen dat $\dim A + B = 4$ zullen we bewijzen dat $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ ook vrij is.

Stel $\exists k, l, m, n \in \mathbb{R} : k\vec{v}_1 + l\vec{v}_2 + m\vec{w}_1 + n\vec{w}_2 = \vec{0}$ (1)

$$k\vec{v}_1 + l\vec{v}_2 = -m\vec{w}_1 - n\vec{w}_2$$

$$\Downarrow k\vec{v}_1 + l\vec{v}_2 \in A \text{ en } -m\vec{w}_1 - n\vec{w}_2 \in B$$

$$m\vec{w}_1 + n\vec{w}_2 \in A \cap B$$

$$\Downarrow \{\vec{v}_1\} \text{ is een basis van } A \cap B$$

$$m\vec{w}_1 + n\vec{w}_2 = p\vec{v}_1 \text{ met } p \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\Downarrow \{\vec{v}_1, \vec{w}_1, \vec{w}_2\} \text{ is lineair onafhankelijk want een basis van } B$$

$$m = n = p = 0$$

$$\Downarrow (1)$$

$$k\vec{v}_1 + l\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\Downarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ is lineair onafhankelijk want een basis van } A$$

$$k = l = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2\} \text{ is vrij}$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ is dus een basis voor $A + B$.

$\Downarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ bestaat uit 4 vectoren

$\dim A + B = 4$

□

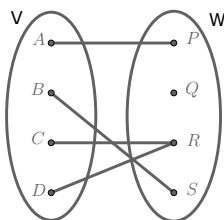
16. Dun de verzameling $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (2, -3, 2), (0, 0, 0)\}$ uit tot een vrije deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ en vul daarna aan tot een basis van $\mathbb{R}^3$.
17. $\{(1, 0), (1, 1)\}$ is een basis van $\mathbb{R}^2$ Bepaal de coördinaten van de vectoren t.o.v. deze basis:
- (a) $\vec{x}(3, -4)$
 - (b) $\vec{y}(0, 2)$
 - (c) $\vec{z}(1, 6)$
18. (a) De coördinaat van $\vec{x}$ t.o.v. de basis $\{(1, 1), (1, -1)\}$ van $\mathbb{R}^2$ is $(4, 3)$.
Bepaal de coördinaat van $\vec{x}$ t.o.v. de canonieke basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ van $\mathbb{R}^2$
- (b) De coördinaat van $\vec{x}$ t.o.v. de basis $\{(1, 1), (1, -1)\}$ van $\mathbb{R}^2$ is $(4, 3)$.
Bepaal de coördinaat van $\vec{x}$ t.o.v. de canonieke basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ van $\mathbb{R}^2$

6 Lineaire afbeeldingen

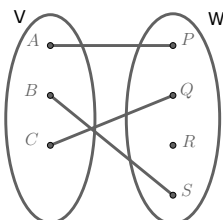
6.1 Definitie en voorbeelden

Een **functie** van V naar W is een verband waarbij voor elk element van V hoogstens 1 element van W overeenkomt.

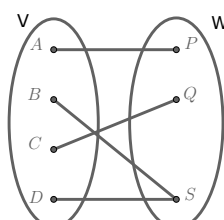
Een **afbeelding** $f : V \rightarrow W$ is een functie waarvan het domein samenvalt met $V : \text{dom } f = V$.



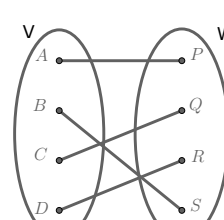
Afbeelding



Injectie



Surjectie



Bijectie

Een afbeelding f van V naar W is een verband dat voor elk element van V precies één element van W koppelt. Een element van W kan met meerdere elementen van V gekoppeld zijn.

Een afbeelding $f : V \rightarrow W$ is **injectief** als elk element van W hoogstens éénmaal bereikt wordt door f .

Of: $f : V \rightarrow W$ is injectief als $\forall v, v' \in V : f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'$

Een afbeelding $f : V \rightarrow W$ is **surjectief** als elk element van W minstens éénmaal bereikt wordt door f .

Of: $f : V \rightarrow W$ is surjectief als $\forall w \in W : \exists v \in V : f(v) = w$

Een afbeelding $f : V \rightarrow W$ is **bijjectief** als elk element van W juist éénmaal bereikt wordt door f .

Of: $f : V \rightarrow W$ is bijjectief als $\forall w \in W : \exists! v \in V : f(v) = w$

Een afbeelding $f : V \rightarrow W$ is **lineair**



$$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \forall r, s \in \mathbb{R} : f(r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2) = rf(\vec{v}_1) + sf(\vec{v}_2)$$

Voorbeelden

1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \rightarrow \mathbb{R}^2(x, 0)$ is een lineaire afbeelding want

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall r, s \in \mathbb{R} :$$

$$\begin{aligned} - f[r(x_1, x_2) + s(x_2, y_2)] &= f(rx_1 + sx_2, ry_1 + sy_2) \\ &= (rx_1 + sx_2, 0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} - rf(x_1, y_1) + sf(x_2, y_2) &= r(x_1, 0) + s(y_1, 0) \\ &= (rx_1 + sy_1, 0) \end{aligned} \quad (2)$$

Omdat (1) = (2) is wegens de definitie f een lineaire afbeelding.

2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow (x + y, 2x - y, x - y)$ is een lineaire afbeelding want

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall r, s \in \mathbb{R} :$$

$$\begin{aligned} & - f(rx_1 + sx_2, ry_1 + sy_2) \\ & = (rx_1 + sx_2 + ry_1 + sy_2, 2(rx_1 + sx_2) - (ry_1 + sy_2), rx_1 + sx_2 - (ry_1 + sy_2)) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & - r f(x_1, y_1) + s f(x_2, y_2) \\ & = r(x_1 + y_1, 2x_1 - y_1, x_1 - y_1) + s(x_2 + y_2, 2x_2 - y_2, x_2 - y_2) \\ & = (rx_1 + ry_1 + sx_2 + sy_2, 2rx_1 - ry_1 + 2sx_2 - sy_2, rx_1 - ry_1 + sx_2 - sy_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Omdat (1) = (2) is wegens de definitie f een lineaire afbeelding.

6.2 Eigenschappen

$$1) f(\vec{0}) = \vec{0}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} f(\vec{0}) &= f(0 \cdot \vec{a}) && \text{rekenregel} \\ &= 0 \cdot f(\vec{a}) && f \text{ is een lineaire afbeelding} \\ &= \vec{0} && \text{rekenregel} \end{aligned}$$

□

$$2) \forall \vec{a} \in V : f(-\vec{a}) = -f(\vec{a})$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} f(-\vec{a}) &= f((-1) \cdot \vec{a}) && \text{rekenregel} \\ &= (-1) \cdot f(\vec{a}) && f \text{ is een lineaire afbeelding} \\ &= -f(\vec{a}) && \text{rekenregel} \end{aligned}$$

□

6.3 Matrix en vergelijkingen

Voorbeeld

$\mathbb{R}, V, +$ en $\mathbb{R}, W, +$ zijn vectorruimten met basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, respectievelijk $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

$$\begin{aligned} \text{We bekijken de lineaire afbeelding } f : V \rightarrow W : \quad & f(\vec{e}_1) = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ & f(\vec{e}_2) = 6\vec{u}_1 \\ & f(\vec{e}_3) = 5\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{aligned}$$

We noteren deze afbeelding f in verkorte vorm: $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

We noemen dit de **matrix** van f .

$$\vec{x} \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} \in V \text{ en } \vec{y} \begin{pmatrix} y_1, y_2 \end{pmatrix} \in W$$

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \\ &= x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3) \\ &= x_1 (3\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + x_2 (6\vec{u}_1) + x_3 (5\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \\ &= (3x_1 + 6x_2 + 5x_3)\vec{u}_1 + (-x_1 + x_3)\vec{u}_2 \\ \Downarrow f(\vec{x}) = \vec{y} &= y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 \\ \begin{cases} y_1 = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Dit zijn de vergelijkingen van de lineaire afbeelding f

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix} \text{ of } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$f: V \rightarrow W: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (y_1, y_2)$$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (3x_1 + 6x_2 + 5x_3, -x_1 + x_3)$$

Controle:

We nemen $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0, 1, 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 0, 0, 1 \end{pmatrix}$, als basis.

$$f(1, 0, 0) = (3, -1) = 3 \cdot (1, 0) - 1 \cdot (0, 1) = 3 \cdot \vec{u}_1 - 1 \cdot \vec{u}_2$$

$$f(0, 1, 0) = (6, 0) = 6 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) = 6 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2$$

$$f(0, 0, 1) = (5, 1) = 5 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) = 5 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_2$$

19. Zijn de volgende afbeeldingen lineaire afbeeldingen? Zo ja, bepaal de matrix.

(a) $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \rightarrow (x + 2, y + 2)$

(b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: x \rightarrow (x, -x)$

(c) $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$

(d) $f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y) \rightarrow (2x + y, 3x - y)$

(e) $f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow \sin x$

6.4 Beeld en kern van een lineaire afbeelding

De **kern** van een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow W$ is een deelverzameling van V :

$$\ker f = \{ \vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0} \}$$

$\ker f$ is een deelvectorruimte van V

Bewijs.

$$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker f; \forall r, s \in \mathbb{R} :$$

$$f(r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2) = rf(\vec{v}_1) + sf(\vec{v}_2)$$

$$= r \cdot \vec{0} + s \cdot \vec{0}$$

$$= \vec{0}$$

f is een lineaire afbeelding

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker f$$

rekenregel

Gevolg: $r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 \in \ker f$

$\Downarrow$ criterium deelvectorruimte

$\ker f$ is een deelvectorruimte van V

□

De **nulliteit** n van een lineaire afbeelding is dimensie van de kern van een lineaire afbeelding

$$n_f = \dim \ker f$$

Het **beeld** (image Im) van een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow W$ is een deelverzameling van W :

$$\text{Im} f = \{ f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V \}$$

$\text{Im} f$ is een deelvectorruimte van W

Bewijs.

$$\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im} f; \forall r, s \in \mathbb{R} :$$

$$r\vec{w}_1 + s\vec{w}_2 = rf(\vec{v}_1) + sf(\vec{v}_2)$$

$$= f(r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2)$$

definitie $\text{Im} f$

f is een lineaire afbeelding

Gevolg: $r\vec{w}_1 + s\vec{w}_2 \in \text{Im} f$

$\Downarrow$ criterium deelvectorruimte

$\text{Im} f$ is een deelvectorruimte van W

□

De **rang** van een lineaire afbeelding is dimensie van het beeld van een lineaire afbeelding

$$r_f = \dim \text{Im} f$$

Eigenschap

De beelden van een basis is een voortbrengende verzameling van het beeld.

Als $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ een basis is van $\mathbb{R}, V, +$, dan is $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ een voortbrengende deelverzameling van $Im f$.

Bewijs.

We moeten bewijzen dat elk element van $Im f$ kan geschreven worden als een lineaire combinatie van $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$

$$\forall \vec{w} \in Im f : \exists \vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{w}$$

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \dots + x_n \vec{e}_n \text{ want } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \text{ is een basis van } V$$

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \dots + x_n \vec{e}_n)$$

$$= x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) \dots + x_n f(\vec{e}_n) \quad f \text{ is een lineaire afbeelding}$$

$\vec{w}$ kan geschreven worden als een lineaire combinatie van $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$

□

Dimensiestelling van kern en beeld van een lineaire transformatie

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim Im f + \dim Ker f \\ &= r_f + n_f \end{aligned}$$

Bewijs.

Zij $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r\}$ een basis van $ker f$.

Een basis is ook een vrije verzameling.

Een vrije verzameling kan uitgebreid worden tot een basis van V : $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-r}\}$

↓ De beelden van een basis is een voortbrengende verzameling in $Im f$.

$\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_r), f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_{n-r})\}$ is een voortbrengende verzameling in $Im f$

↓ Definitie $ker f$: $f(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_2) = \dots = f(\vec{e}_r) = \vec{0}$

$\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_{n-r})\}$ is een voortbrengende verzameling in $Im f$.

Is $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_{n-r})\}$ ook een vrije verzameling in $Im f$?

$$\text{Stel } k_1 f(\vec{u}_1) + \dots + k_{n-r} f(\vec{u}_{n-r}) = \vec{0}$$

$$f(k_1 \vec{u}_1 + \dots + k_{n-r} \vec{u}_{n-r}) = \vec{0} \quad f \text{ is een lineaire afbeelding}$$

$$k_1 \vec{u}_1 + \dots + k_{n-r} \vec{u}_{n-r} \in ker f$$

↓ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r\}$ is een basis van $ker f$

$$k_1 \vec{u}_1 + \dots + k_{n-r} \vec{u}_{n-r} = l_1 \vec{e}_1 + l_2 \vec{e}_2 \dots + l_r \vec{e}_r$$

$$k_1 \vec{u}_1 + \dots + k_{n-r} \vec{u}_{n-r} - l_1 \vec{e}_1 - l_2 \vec{e}_2 \dots - l_r \vec{e}_r = \vec{0}$$

↓ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-r}\}$ is een basis, dus een vrije verzameling

$$k_1 = \dots = k_{n-r} = l_1 = \dots = l_r = 0$$

↓

$\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_{n-r})\}$ is ook een vrije verzameling in $Im f$

Besluit: $\{f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_{n-r})\}$ is een basis in $Im f$.

Gevolg: $\dim Im f = n - r = \dim V - \dim ker f$

□

Voorbeelden

- We bekijken de afbeelding $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow (0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$

We noemen S de shiftoperator.

Het beeld van S zijn de n -tallen die het resultaat zijn van een n -tal waarop de shiftoperator toegepast is. Deze beelden zijn steeds van de vorm $(0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. $\text{Im } S = \text{span} \{\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$

De kern van S zijn de n -tallen die op $(0, 0, \dots, 0)$ worden afgebeeld. Dat zijn alle n -tallen met enkel het laatste element verschillend van nul. Dus $\ker S = \mathbb{R} \{\vec{e}_n\}$.

- We bekijken de afbeelding $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ met

$$f(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 2)$$

$$f(0, 1, 0) = (-1, -2, 1, -3)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, -1, 2, 0)$$

Het beeld van f is de opspanning van de vectoren die het beeld zijn van de basisvectoren van $V = \mathbb{R}^3$: $\text{Im } f = \text{span} \{(1, 1, 0, 2), (-1, -2, 1, -3), (1, -1, 2, 0)\}$

Deze opspanning is sowieso een voortbrengende verzameling voor $\text{Im } f$. Is deze opspanning ook een vrije verzameling?

Stel $k(1, 1, 0, 2) + l(-1, -2, 1, -3) + m(1, -1, 2, 0) = (0, 0, 0, 0)$

$$\begin{cases} k - l + m = 0 \\ k - 2l - m = 0 \\ l + 2m = 0 \\ 2k - 3l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - l + m = 0 \\ k - 2l - m = 0 \\ m = -\frac{1}{2}l \\ 2k - 3l = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}l - l - \frac{1}{2}l = 0 \\ \frac{3}{2}l - 2l + \frac{1}{2}l = 0 \\ m = -\frac{1}{2}l \\ k = \frac{3}{2}l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ m = -\frac{1}{2}l \\ k = \frac{3}{2}l \end{cases}$$

Dit is niet de triviale lineaire combinatie. Dus de opspanning is niet vrij. De vectoren $f(\vec{e}_i)$ zijn een lineaire combinatie van de andere vectoren. We kunnen $\text{Im } f$ dus beperken tot twee vectoren zonder dat het voortbrengende karakter in het gedrang komt.

Bijv. $\text{Im } f = \text{span} \{(1, 1, 0, 2), (-1, -2, 1, -3)\}$. Deze deelverzameling is wel vrij.

Dus een basis van $\text{Im } f = \{(1, 1, 0, 2), (-1, -2, 1, -3)\}$

Rang $f = \dim \text{Im } f = 2$

$$\ker f = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

Stel $\vec{v} = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$

$$f(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow f(\vec{v}) = a(1, 1, 0, 2) + b(-1, -2, 1, -3) + c(1, -1, 2, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a - 2b - c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a - 2b - c = 0 \\ c = -\frac{1}{2}b \\ a = \frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ c = -\frac{1}{2}b \\ a = \frac{3}{2}b \end{cases}$$

$$\ker f = \left\{ \left(\frac{3}{2}b, b, -\frac{1}{2}b \right) \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\ker f = \mathbb{R} \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right)$$

Nulliteit = $\dim \ker f = 1$

- We bekijken de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\text{Im } f = \text{span}\{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (-1, 3, 2)\}$

Is $\{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (-1, 3, 2)\}$ een vrije verzameling?

Is $k(1, 2, 3) + l(0, 1, 0) + m(-1, 3, 2) = (0, 0, 0)$ de triviale lineaire combinatie?

$$\begin{cases} k - m = 0 \\ 2k + l + 3m = 0 \\ 3k + 2m = 0 \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt: $k = m$ en uit de derde vergelijking volgt: $k = -\frac{2}{3}m$.

Dit is enkel mogelijk als $k = m = 0$. Daaruit volgt dat ook $l = 0$.

$\{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (-1, 3, 2)\}$ is dus een vrije verzameling.

$\text{Rang } f = \dim \text{Im } f = 3$

Wegens de dimensiestelling is de nulliteit gelijk aan nul.

Dus $\ker f = \{(0, 0, 0)\}$.

20. Bepaal de kern en het beeld van de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

6.5 Isomorfismen

$f : V \rightarrow W$ is een injectieve afbeelding $\Leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$

Bewijs.

$\Rightarrow$

$$\forall \vec{x} \in \ker f : f(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{0}) \quad (\text{eigenschap})$$

$$\vec{x} = \vec{0} \quad f \text{ is injectief}$$

$$\ker f = \{\vec{0}\}$$

$\Leftarrow$

$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V : f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \Rightarrow f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) = \vec{0}$$

$$f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0} \quad (f \text{ is een lineaire afbeelding})$$

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \ker f \quad (\text{definitie kern})$$

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0} \quad (\text{gegeven})$$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2$$

Besluit: f is injectief

□

$f : V \rightarrow W$, met $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ een basis van V is een injectieve afbeelding

$\Updownarrow$
 $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ is vrij

Bewijs.

$\Rightarrow$

$$k_1 f(\vec{e}_1) + k_2 f(\vec{e}_2) + \dots + k_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$

(1)

$$f(k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2 + \dots + k_n \vec{e}_n) = \vec{0}$$

f is een lineaire afbeelding

$$k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2 + \dots + k_n \vec{e}_n \in \ker f$$

definitie kern

$$k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2 + \dots + k_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

f is surjectief $\Leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ is een basis van V , dus vrij

Ook (1) is de triviale lineaire combinatie

Besluit: $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ is vrij

$\Leftarrow$

$$\forall \vec{x} \in \ker f : f(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) = \vec{0}$$

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ is een basis van V

$$x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$

f is een lineaire afbeelding

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

$\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ is vrij

$$\vec{x} = \vec{0}$$

Gevolg: $\ker f = \{\vec{0}\}$

Besluit: f is injectief

□

$f : V \rightarrow W$, met $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ een basis van V is een surjectieve afbeelding

$\Updownarrow$
 $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ is een voortbrengende verzameling van W

Bewijs.

$\Rightarrow$

Als $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ een basis is van V

$\Downarrow$ eigenschap

$\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ een voortbrengende deelverzameling van $\text{Im } f$

$\Downarrow$ f is surjectief dus $\text{Im } f = W$

$\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ is een voortbrengende deelverzameling van W

$\Leftarrow$

$\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ is een voortbrengende verzameling van W

$\forall \vec{y} \in W : \vec{y}$ is een lineaire combinatie van $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\} \subset \text{Im } f$

$\Downarrow$

$$\text{Im } f = W$$

f is surjectief

□

Een **isomorfisme** is een bijectieve lineaire afbeelding.
 V is isomorf met W als er een isomorfisme $f : V \rightarrow W$ bestaat.

Gevolg:

$f : V \rightarrow W$, met $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ een basis van V is een isomorfisme
 $\Updownarrow$
 $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ is een basis van W
 V en W zijn isomorf $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$

7 Eigenwaarden en eigenvectoren

7.1 Lineaire transformaties

Een transformatie of operator van V is een afbeelding $f : V \rightarrow V$.

Een lineaire transformatie of operator van V is een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$.

Gevolgen:

- ✓ Een lineaire transformatie heeft een vierkante matrix.
- ✓ $\text{Im } f$ is een deelvectorruimte van V .
- ✓ f is surjectief $\Leftrightarrow \text{Im } f = V$
 $\Leftrightarrow \{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ is een voortbrengende verzameling van V

In de meetkunde werken we ook met transformaties.

Een isometrie is een transformatie die figuren afbeeldt op congruente figuren.

Transformaties die figuren op gelijkvormige figuren afbeelden zijn gelijkvormigheden.

Isometrieën en gelijkvormigheden zijn al dan niet lineaire transformaties.

- De spiegeling om de x -as $s_x : \pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (x, -y)$ heeft als matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- De spiegeling om de y -as $s_y : \pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (-x, y)$ heeft als matrix: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- De spiegeling om de oorsprong $s_0 : \pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$ heeft als matrix: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- De verschuiving $t_{\vec{OA}} : \pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ met $A(a, b)$ is geen lineaire transformatie. Hiermee stemt geen matrix overeen die het voorschrift kan weergeven.
- De homothetie met centrum O en factor r
 $h_{(0,r)} : \pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (rx, ry)$ heeft als matrix: $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$
- De draaiing met centrum O over een hoek van 90° in tegenwijzerzin
 $r(0, 90^\circ) : \pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (-y, x)$ heeft als matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- De draaiing met centrum O over een hoek van 90° in wijzerzin
 $r(0, -90^\circ) : \pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (y, -x)$ heeft als matrix: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

21. Bepaal de matrix van de volgende lineaire transformaties

- a) een spiegeling om de x -as en een spiegeling om de y -as.
- b) een spiegeling om de x -as en een homothetie met centrum O en factor 3.

7.2 De stelling van het alternatief

Een lineaire transformatie t is injectief als en slechts als t surjectief is.

Bewijs.

t is injectief
 $\Updownarrow$ eigenschap
 $\ker t = \vec{0}$
 $\Updownarrow$
 $\dim \ker t = 0$
 $\Updownarrow$ dimensiestelling
 $\dim \operatorname{Im} t = \dim V$
 $\Updownarrow \operatorname{Im} t$ is een deelvectorruimte van V
 $\operatorname{Im} t = V$
 $\Updownarrow$ beeld van een lineaire afbeelding f is $W \Leftrightarrow f$ is surjectief en nu is $V = W$
 t is surjectief

Gevolg: Een lineaire transformatie is ofwel injectief én surjectief
 ofwel noch injectie noch surjectief

□

7.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

$\lambda \in \mathbb{R}$ is een eigenwaarde van een lineaire transformatie $t \Leftrightarrow \exists \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\} : t(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$
 $\vec{v}$ is een eigenvector van t met als eigenwaarde λ .

$V_\lambda = \{\vec{v} \in V; t(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}$ is een **eigenruimte** van λ .

V_λ is een deelvectorruimte van V .

Bewijs. $\forall r, s \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V_\lambda :$

$$\begin{aligned}
 t(r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}) &= r \cdot t(\vec{v}) + s \cdot t(\vec{w}) \\
 &= r \cdot \lambda \vec{v} + s \cdot \lambda \vec{w} \\
 &= \lambda(r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w})
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \in V_\lambda$$

t is een lineaire transformatie
 definitie eigenruimte V_λ
 commutatieve en distributieve eigenschap
 criterium deelruimte

□

Voorbeeld

We bekijken de lineaire transformatie t in $\mathbb{R}, V$, met $\dim V = 2$:

$$t(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

$$t(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad (*)$$

λ is een eigenwaarde van t



$$\exists \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\} : t(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

$$\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : (y_1, y_2) = \lambda (x_1, x_2)$$

$$\begin{cases} y_1 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

Wegens (*) geldt dus ook: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + 4x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + (4 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Omdat $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ moet de matrix singulier zijn. Dus $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ of } \lambda = 3$$

Dit is de karakteristieke vergelijking van t

Eigenruimte bij $\lambda = 2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2x_1 \\ x_1 + 4x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = \{-2x_2\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2; x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_2(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2); x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathbb{R}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

Eigenruimte bij $\lambda = 3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3x_1 \\ x_1 + 4x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$V_3 = \{-x_2\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2; x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_2(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2); x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathbb{R}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$$

Opmerkingen

Het stelsel $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ (zie (**)) kan je ook als volgt oplossen:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 & (1) \\ x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

substitutie van (2) in (1) geeft: $-(1-\lambda)(4-\lambda)x_2 - 2x_2 = 0$
 $[-(1-\lambda)(4-\lambda) - 2]x_2 = 0$

Omdat $x_2 \neq 0$ moet $-(1-\lambda)(4-\lambda) - 2 = 0$ of $(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$

Dit levert dezelfde karakteristieke vergelijking op: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

Zij $\vec{v} \in V_2$, geldt dan $t(\vec{v}) = 2\vec{v}$?

$V_2 = \mathbb{R}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ is een eigenruimte met $t(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ en $t(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$

$$\begin{aligned} t(\vec{v}) &= t(r(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)) && \text{met } r \in \mathbb{R} \\ &= -2rt(\vec{e}_1) + rt(\vec{e}_2) && t \text{ is een lineaire transformatie} \\ &= -2r(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + r(-2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) \\ &= -2r\vec{e}_1 - 2r\vec{e}_2 - 2r\vec{e}_1 + 4r\vec{e}_2 \\ &= -4r\vec{e}_1 + 2r\vec{e}_2 \\ &= 2r(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &= 2\vec{v} \end{aligned}$$

22. Hebben de volgende transformaties eigenvectoren? Zo ja, bepaal de bijhorende eigenruimte.

(a) $t(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$$t(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

(b) $t(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2$

$$t(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

7.4 Lineair onafhankelijke eigenvectoren

Eigenvectoren die bij verschillende eigenwaarden horen zijn lineair onafhankelijk

Gegeven: $t(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1$
 $t(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2$
 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Te bewijzen: $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2$ zijn lineair onafhankelijk.

Bewijs.

$$k\vec{u}_1 + l\vec{u}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

$$t(k\vec{u}_1 + l\vec{u}_2) = t(\vec{0})$$

$$kt(\vec{u}_1) + lt(\vec{u}_2) = \vec{0} \quad (\text{lineaire transformatie})$$

$$k\lambda_1 \vec{u}_1 + l\lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

$$\lambda_1(1) : \lambda_1 k \vec{u}_1 + \lambda_1 l \vec{u}_2 = \vec{0} \quad (3)$$

$$(2) - (3) : l(\lambda_2 - \lambda_1) \vec{u}_2 = \vec{0}$$

$\Downarrow \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ (gegeven) en $\vec{u}_2 \neq \vec{0}$ want $\vec{u}_2$ is een eigenvector

$$l = 0$$

substitutie in (1) : $k\vec{u}_1 = \vec{0}$

Gevolg: $k\vec{u}_1 + l\vec{u}_2 = \vec{0}$ is de triviale lineaire combinatie

Besluit: $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ is vrij of $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2$ zijn lineair onafhankelijk

□

Gevolgen:

- Een lineaire combinatie van een n -dimensionale vectorruimte heeft hoogstens n verschillende eigenwaarden.
- Als een lineaire transformatie van een n -dimensionale vectorruimte n verschillende eigenwaarden heeft, dan kunnen we een basis bestaande uit eigenvectoren vormen.

$$t(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1, \quad t(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2, \quad \dots, \quad t(\vec{u}_n) = \lambda_n \vec{u}_n$$

De matrix van t : $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ is een diagonaalmatrix.

We noemen t diagonaliseerbaar.

8 Herhalingsoefeningen

8.1 Definitie en rekenregels

23. Waarom is de verzameling van de singuliere matrices $S = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det M = 0\}$ voorzien van de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices geen vectorruimte?
24. Gegeven is de deelverzameling $W = \{(2s, 0, -s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.
Toon aan dat $\mathbb{R}, W, +$ een vectorruimte is.
25. Kan je de rij $2, 0, -2, -4, \dots$ als lineaire combinatie van de rijen $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ en $1, 2, 1, 2, 1, \dots$ schrijven?

8.2 Deelvectorruimten

26. Gegeven: vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 3}, +$ en deelverzameling $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+b & 0 \\ -b & 0 & 3a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Toon aan dat W een deelvectorruimte is van $\mathbb{R}^{2 \times 3}$.
27. Gegeven: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ en $W = \{(2s, 3s - t, s + 5t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.
Toon aan dat W een deelvectorruimte is van $\mathbb{R}^3$.

28. Gegeven: vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 2}, +$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 1-b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ en } W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ en } a + d = 0 \right\}$$

Zijn V en W deelruimten van $\mathbb{R}^{2 \times 2}$?

29. Gegeven: $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +$

$$\vec{u} = -2 + 2x - x^2, \vec{v} = 3 + 2x + x^2; \vec{w} = 5 + 2x^2$$

Behoort $\vec{p} = -5x^2 + 6x + 14$ tot $\text{Span} \{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$?

30. Gegeven: vectorruimte $\mathbb{R}, V, +$ en $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
Toon aan $\text{Span} \{ \vec{u}, \vec{v} \} = \text{Span} \{ \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \}$.

31. De volgende verzamelingen zijn deelvectorruimten in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$.

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} \text{ en } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{7}\}$$

Geef de verzameling van $V \cap W$.
Is $V \cap W$ ook een deelruimte?

32. Bepaal $k \in \mathbb{R}$ zodat

(a) $(2, -3, k) \in \text{Span} \{(5, 1, 2), (3, -2, -1)\}$ in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$

(b) $(k + x)^3 \in \text{Span} \{1, x, x^2, x^3\}$ in $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +$

8.3 Vrije deelverzamelingen

33. Gegeven: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ is een vrije verzameling.
Is $\{\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_1 + \vec{a}_3\}$ een vrije verzameling?
34. $V = \{x^2 + x + 1, 3x^2 - x + 2\}$ is een vrije verzameling in $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +$.
Is $V \cup \{-2x^2 + 2x - 1\}$ ook een vrije verzameling?
35. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ is een niet-vrije deelverzameling. Volgt daaruit dat $\vec{v}$ een lineaire combinatie van $\vec{u}$ en $\vec{w}$ is? Waarom (niet)?

8.4 Voortbrengende deelverzamelingen

36. $D = \{x^2 - x + 1, x + 1, x^2 + 2\}$
- (a) Is D een voortbrengende verzameling van $\mathbb{R}, \mathbb{R}_2[x], +$?
- (b) Is x^2 lineair afhankelijk van D ?
37. Gegeven zijn de volgende deelruimten. Bepaal van elk de voortbrengende verzameling:
- (a) $\{a + b + (2a - b)x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +$
- (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 3a & b \\ 2a + b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 2}, +$
- (c) $\{(k - l - 2m, k + l + 2m) \mid k, l \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$
- (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$
- (e) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0 \text{ en } c - d = 0\}$ in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +$
38. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +$ met de vectoren

$$\vec{u} = (2, -3, 5, -6), \vec{v} = (-4, 6, -8, 12), \vec{w} = (3, -4, 5, -7), \vec{x} = (0, 1, -2, 4)$$

$$W = \text{span} \{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \}$$

Kan deze voortbrengende verzameling $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ gereduceerd worden? Kan je dus voor de deelruimte W een voortbrengende verzameling vinden met minder elementen?

8.5 Basis en dimensie

39. Vul de verzameling $B = \{(2, -1)\}$ aan tot een basis van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$
40. (a) $A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ is een basis van $\mathbb{R}^3$. Welke vector(en) van A mag je door $(3, 3, 4)$ vervangen zodat je opnieuw een basis van $\mathbb{R}^3$ bekomt?

- (b) $A = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ is een basis van $\mathbb{R}^3$. Welke vector(en) van A mag je door $(3, 3, 4)$ vervangen zodat je opnieuw een basis van $\mathbb{R}^3$ bekomt?
41. $B = \{(3, 0, -2), (0, 1, 5), (2, -1, 2)\}$ is een basis $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$.
Bepaal de vector $\vec{v}$ zodat $co(\vec{v}) = (-2, 1, 7)$.
42. Bepaal de coördinaten van $\vec{v} = (2, 4, 8)$ t.o.v. de basis
- (a) $B = \{(1, -3, 0), (0, 0, 2), (2, -1, 0)\}$
- (b) $B' = \{(1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 3, 5)\}$
43. Ga na of de volgende verzameling een basis van $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +$ is
- (a) $\{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$
- (b) $\{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$
- (c) $\{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$

8.6 Lineaire afbeeldingen

44. Bepaal de vergelijkingen van de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt:
 $f(1, 1) = (0, 1, 2)$ en $f(-1, 1) = (2, 1, 0)$
45. Bepaal de kern en het beeld van de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

8.7 Eigenwaarden en eigenvectoren

46. Met welke transformatie komt het volgend voorschrift overeen?
- a) $\pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (y, x)$
- b) $\pi_0 \rightarrow \pi_0 : (x, y) \rightarrow (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$
47. Bepaal de matrix van de volgende lineaire transformaties
- a) een draaiing van 90° in tegenwijzerzin met centrum 0 en een spiegeling om de y -as.
- b) een spiegeling om de y -as en een draaiing van 90° in tegenwijzerzin met centrum 0.
48. Hebben de volgende transformaties eigenvectoren? Zo ja, bepaal de bijhorende eigenruimte.
- (a) $t(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$
 $t(\vec{e}_2) = 7\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
- (b) $t(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$
 $t(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1$

Referenties

- [1] Greta Sanders, *Cursus vectorruimten*, DVM Aalst, 2022.
- [2] Koen De Naeghel, *Vectorruimten uit Wiskunde In Zicht*, 2023.
- [3] Eric De Jonghe, *Cursus vectorruimte*, OLV-instituut Oudenaarde, 1988; gebaseerd op *Wiskunde 5* (P. Gevers).
- [4] Tom De Medts en Geertrui Van de Voorde, *Lineaire algebra en meetkunde I*, UGent, 2015.
- [5] *Vectorruimten*, Exponent 5 (6 – 8 u), Standaard uitgeverij, 1992.