SEPTEMBERCURSUS WISKUNDE

DAG 3

Algebra met focus op determinanten en stelsels
Vlakke analytische meetkunde

Deel 3 van de septembercursus bevat een aantal basisoefeningen omtrent stelsels, determinanten en meetkundetechnieken in het vlak die je vlot moet kunnen oplossen om een goede start te nemen voor de opleiding Industriële Wetenschappen van de gezamenlijke opleiding van UHasselt en KU Leuven in Diepenbeek.
Als achtergrondinformatie kan je de MOOC 'Wiskunde voor (startende) studenten' gebruiken. Hiervoor kan je je gratis registreren op deze website:

https://iiw.kuleuven.be/studeren/toekomstigestudenten/mooc-wiskunde

Bij de oefeningen in deze tekst verwijzen we regelmatig naar bepaalde modules uit de MOOC zodat je gericht op zoek kan naar de nodige uitleg als je zelf al thuis aan de slag wil. De tijd is sowieso te beperkt om **ALLE** leerstof live op de campus uit de doeken te doen. Tijdens een gemeenschappelijk theorie-uurtje in de voor- **EN** namiddag zetten we de belangrijkste zaken op een rij met veel voorbeelden en praktische (reken)tips. Volgende modules staan op dag 3 in de kijker:

- MODULE 5.1: vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels
- MODULE 5.2: matrices
- MODULE 4.2: analytische meetkunde

Na de theorie en een korte pauze volgt er een oefensessie van 2 uur op de campus. Tijdens deze sessie is er tijd om vragen te stellen en ook zelf (in kleinere groep) oefeningen op te lossen onder begeleiding van een docent.

OPGAVE OEFENINGEN

We vliegen er deze keer meteen in!

1. Bereken de volgende determinanten zonder de hulp van je rekentoestel:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n & n(n+1) \\ 1 & n+1 & (n+1)(n+2) \\ 1 & n+2 & (n+2)(n+3) \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -\cos\alpha & -1 & 1 \\ \cos(2\alpha) & 2\cos\alpha & 1 \\ -\sin^2\alpha & \cos\alpha & 1+\cos\alpha \end{vmatrix}$

2. Bewijs volgende gelijkheden:

a) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

TIP bij oefening 1 en 2: Bestudeer de voorbeelden + eigenschappen voor het berekenen van determinanten in module 5.2.4. Wil je je graag iets concreets voorstellen bij wat een niet-nul 3x3-determinant precies is, dan kan je denken aan het volume van een parallellepipedum. Zie bijvoorbeeld:

https://nl.wikipedia.org/wiki/Parallellepipedum

3. Los volgend stelsel op door toepassing van de substitutiemethode:

$$\begin{cases} 4(3x-1)-5(2y+1)=x+y-20 \\ 6-(x-2y)=x-7(y+x)+43 \end{cases}$$

4. Bepaal de volgende natuurlijke getallen van 2 cijfers door het oplossen van een gepast stelsel met behulp van de substitutiemethode:

   a) Verwisselt men de cijfers, dan wordt het getal 9 eenheden groter. Het cijfer van de tientallen is bovendien half zo groot als dat van de eenheden.
   b) Het getal is het twaalfvoud van het cijfer van de tientallen en is 18 meer dan de som van de cijfers.
   c) Het getal is 54 meer dan de som van de cijfers én het getal is ook 54 meer dan het cijfer van de tientallen.

TIP bij oefening 3 en 4: Meer uitleg over de substitutiemethode voor het oplossen van stelsels staat in module 5.1.7. Bij oefening 4 kan je het gevraagde getal als oplossing van een stelsel vinden indien je het te zoeken getal van 2 cijfers noteert als 10 y + x, waarbij x = cijfer van de eenheden en y = cijfer van de tientallen.

5. Los volgende stelsels op door toepassing van de methode van Gauss :

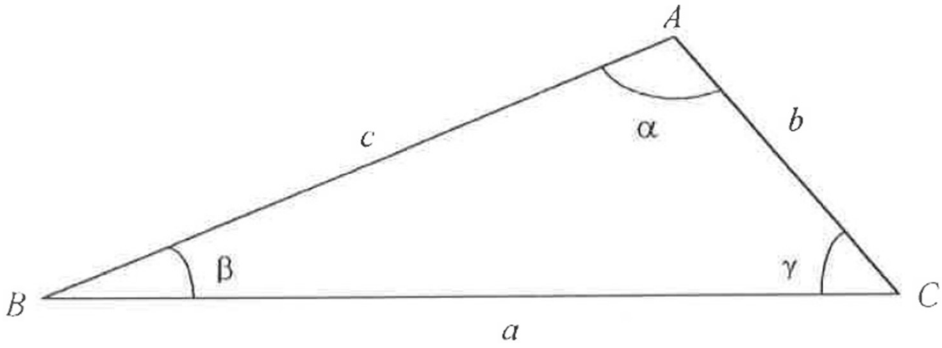
a) $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 4x - 2y + 2z = 10 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y + z = 6 \\ -x + 7y - 2z = 1 \\ 2x + 6y - z = 5 \end{cases}$

TIP bij oefening 5: De methode van Gauss voor het oplossen van stelsels staat stap voor stap uitgelegd in module 5.2.9 en 5.2.10. Opmerking: de methode van Gauss stemt overeen met het ref-commando van je rekentoestel. Het rref-commando bestaat ook en gaat nog een stap verder door ook nog nullen boven de hoofddiagonaal te proberen maken. Men spreekt dan van de spilmethode.

6. Vind de UNIEKE oplossing van volgende stelsels door toepassing van de methode van Cramer: a) $\begin{cases} 7x - 2y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ en b) $\begin{cases} x - 4y + z = 6 \\ 4x - y + 2z = -1 \\ 2x + 2y - 3z = -20 \end{cases}$

TIP bij oefening 6: De methode van Cramer is een determinantenmethode voor het oplossen van een stelsel en is vooral handig om te gebruiken als je weet dat je stelsel een unieke oplossing zal hebben. Zie module 5.2.11 voor meer uitleg en een voorbeeld!

7. Gegeven is een willekeurige driehoek waarvan de lengten van de zijden a, b en c zijn. Tegenover deze zijden liggen respectievelijk de hoeken α, β en γ.



a) Bewijs door gebruik te maken van goniometrie dat:

$$\begin{cases} b\cos\gamma + c\cos\beta = a \\ c\cos\alpha + a\cos\gamma = b \\ a\cos\beta + b\cos\alpha = c \end{cases}$$

b) Gebruik daarna de regel van Cramer om te bewijzen dat : $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b\cdot c}$.

c) Gebruik opnieuw de regel van Cramer om analoge formules te vinden voor $\cos\beta$ en $\cos\gamma$.

OPMERKING. Hiermee zijn we rond met de opfrissing van het algebra-deel.
Hierbij hebben we niet specifiek geoefend op zuivere matrix-rekentechnieken. Daar zullen we tijdens het academiejaar hoofdzakelijk ons rekentoestel voor inschakelen. Maar je kan alvast zeker bij je thuis de herhalingstest in module 5.1.12 al dan niet met de hulp van je rekentoestel proberen oplossen. Mogelijk moet je daarbij nog een aantal andere onderdelen van module 5.1 diepgaander raadplegen voor alle vragen helemaal duidelijk zijn.

Ook een leuke herhalingstest om te proberen maken, is die van module 5.1.9 over vergelijkingen en ongelijkheden. Hier hopen we dat je nu al meteen een topscore kan behalen!

8. Gegeven zijn de rechten: $r_1 : x + 2y - 3 = 0$ en $r_2 : 2x - y + 4 = 0$ en de punten $P_1(0, -5)$ en $P_2(1,\ 3)$.

   a) Zoek het snijpunt van r_1 en r_2 ;
   b) Bepaal de hoek tussen r_1 en r_2 ;
   c) Zoek de vergelijking van de rechte door $P_2(1,\ 3)$ die loodrecht staat op r_1 ;
   d) Bepaal de afstand van $P_1(0, -5)$ tot r_2 ;
   e) Bepaal de vergelijking van de twee bissectrices tussen r_1 en r_2 ;
   f) Bereken de coördinaten van de snijpunten van de rechte r_1 met de assen van het assenstelsel ;
   g) Zoek alle rechten door $P_2(1,\ 3)$ die op de *y*-as een stuk afsnijden waarvan de lengte tweemaal zo groot is als de lengte afgesneden op de *x*-as ;
   h) Bepaal op r_1 alle punten die op afstand 10 liggen van $P_1(0, -5)$;
   i) Bepaal de rechte door het snijpunt van r_1 en r_2 en loodrecht op r_2.

9. Vind een parametervergelijking en de (unieke) cartesische vergelijking van volgende rechten :
   a) De rechte *a* door het punt $P(2, -1)$ en met richtingsvector $\vec{v}(3, -2)$;
   b) De rechte *b* gaande door $Q(-2,\ 3)$ en evenwijdig met $r_1 : 2x - y = 1$;
   c) De rechte *c* gaande door $S(2, 1)$ en loodrecht op $r_2 : 3x - y = 2$;
   d) De rechte *d* door het punt $T(-3, 4)$ en met richtingsvector $\vec{w}(2, 0)$.

10. Bereken de cartesische vergelijking van volgende rechten :
   a) De rechte *a* gaande door de punten *P* (2, 1) en *Q* (6, 4) ;
   b) De rechte *b* gaande door *R* (4, -3) en evenwijdig met de rechte *a* ;
   c) De rechte *c* gaande door *P* (2, 1) en loodrecht op de rechte *b* ;
   d) De twee rechten ℓ_1 en ℓ_2 evenwijdig aan *a* op een afstand 1 van *a*.

11. Gegeven zijn de punten *A*(-2, 3), *B*(-6, 0) en *C*(-1,2).
   a) Bepaal de afstand tussen *A* en *B* ;
   b) Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van het lijnstuk [A, B] ;
   c) Vind de afstand van het punt *C* tot deze middelloodlijn.

TIP bij oefening 8, 9, 10 en 11: Om bovenstaande oefeningen op te lossen kan je de meeste inspiratie opdoen door de voorbeelden te bekijken die uitgewerkt worden in video's 4.2.5, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.11, 4.2.12 en 4.2.13. Wil je graag direct de essentie op een rij zien staan, dan ben je beter af in modules 4.2.4, 4.2.6, 4.2.9, 4.2.10 en 4.2.14 waar dezelfde zaken maar dan zonder commentaarstem uit de doeken worden gedaan.

Nu ben je helemaal gerodeerd om de meetkunde herhalingstest op te lossen van module 4.2.17. Neem hiervoor je tijd, want in vergelijking met andere testen kan deze bij een eerste aanblik als vrij pittig overkomen. Het geeft je alleszins een goede indruk van hoe het zal voelen om een PE-test of examen op de universiteit af te leggen. De leerstof moet echt in je vingers zitten om met vertrouwen aan zo'n test te kunnen beginnen. Dat vertrouwen kweek je door tijdens de lesweken van het academiejaar heel veel oefeningen ZELF te maken (alleen of in groep). En op het moment dat je goed getraind aan de start van het examen verschijnt, zal je ook perfect kunnen slagen (zoals op deze meetkunde test nu hopelijk het geval zal zijn).

BEKNOPTE OPLOSSINGEN

1. a) -11 ; b) -5 ; c) -17 ; d) 0 ; e) 2 ; f) 0

2. /

3. $x = 2$ en $y = 3$

4. a) getal is 12 ; b) getal = 24 ; c) getal = 60

5. a) $\left\{\left(\frac{14-z}{7}, \frac{5z-7}{7}, z\right) | z \in \mathbb{R}\right\}$; b) $\{(0, -z, z) | z \in \mathbb{R}\}$; c) geen oplossingen

6. a) $x = 1$ en $y = 2$; b) $x = -144/55$, $y = -61/55$ en $z = 46/11$

7. c) $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a\cdot c}$ en $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a\cdot b}$

8. a) het punt $(-1, 2)$; b) 90° ; c) $y = 2x + 1$; d) $9/\sqrt{5}$; e) 1e bissectrice: $-x + 3y - 7 = 0$ en 2e bissectrice: $3x + y + 1 = 0$; f) (3, 0) en (0, 3/2) ; g) $y = -2x + 5$ en $y = 2x + 1$; h) $\left(\frac{13-2\sqrt{331}}{5}, \frac{1+\sqrt{331}}{5}\right)$ en $\left(\frac{13+2\sqrt{331}}{5}, \frac{1-\sqrt{331}}{5}\right)$; i) de rechte r_1

9. a) mogelijke parametervergelijking: $a : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -1 - 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$;

   cartesische vergelijking: $a :\ 2x + 3y = 1$

   b) mogelijke parametervergelijking: $b : \begin{cases} x = -2 + k \\ y = 3 + 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$;

   cartesische vergelijking: $b :\ 2x - y = -7$

   c) mogelijke parametervergelijking: $c : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 1 - k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$;

   cartesische vergelijking: $c :\ x + 3y = 5$

   d) mogelijke parametervergelijking: $d : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 4 \end{cases} (k \in \mathbb{R})$;

   cartesische vergelijking: $d :\ y = 4$

10. a) rechte $a : y = \frac{3x}{4} - \frac{1}{2}$

    b) rechte b: $y = \frac{3x}{4} - 6$

    c) rechte c: $y = \frac{-4x}{3} + \frac{11}{3}$;

    d) rechten ℓ_1: $y = \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}$ en $\ell_2 :\ y = \frac{3x}{4} - \frac{7}{4}$

11. a) 5 ; b) $y = -\frac{4x}{3} - \frac{23}{6}$; c) $\frac{27}{10}$