SEPTEMBERCURSUS WISKUNDE

DAG 4

Rekentechnieken onbepaalde integralen
Bepaalde integralen en toepassingen

Deel 4 van de septembercursus bevat een aantal basisoefeningen omtrent integralen die je vlot moet kunnen oplossen om een goede start te nemen voor de opleiding Industriële Wetenschappen van de gezamenlijke opleiding van UHasselt en KU Leuven in Diepenbeek. Als achtergrondinformatie kan je de MOOC 'Wiskunde voor (startende) studenten' gebruiken. Hiervoor kan je je gratis registreren op deze website:

https://iiw.kuleuven.be/studeren/toekomstigestudenten/mooc-wiskunde

Bij de oefeningen in deze tekst verwijzen we regelmatig naar bepaalde modules uit de MOOC zodat je gericht op zoek kan naar de nodige uitleg als je zelf al thuis aan de slag wil. De tijd is sowieso te beperkt om **ALLE** leerstof live op de campus uit de doeken te doen. Tijdens een gemeenschappelijk theorie-uurtje in de voor- **EN** namiddag zetten we de belangrijkste zaken op een rij met veel voorbeelden en praktische (reken)tips. Volgende modules staan op dag 4 in de kijker:

- MODULE 6.2: integralen
- MODULE 6.3: substitutie en partiële integratie
- MODULE 4.1: oppervlakte en inhoudsberekeningen

Na de theorie en een korte pauze volgt er een oefensessie van 2 uur in de voormiddag en 1 uur in de namiddag op de campus. Tijdens deze sessie is er tijd om vragen te stellen en ook zelf oefeningen op te lossen onder begeleiding van een docent.

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

OPGAVE OEFENINGEN

Heb je de integratie-rekentechnieken nog steeds in je vingers zitten?
Over integralen staan er drie testen in de MOOC opgenomen, namelijk in module 6.2.12 (13 vragen), module 6.3.8 (12 vragen) en module 6.3.16 (12 vragen).
Ook de test over oppervlakte en inhoudsberekeningen (11 vragen) in module 4.1.5 is nog een interessante om te proberen maken.
Dat zijn natuurlijk direct al serieuze hellingen om te beklimmen, zeker als je niet meer goed getraind bent. Je kan echter even goed langzaam maar zeker opbouwen naar deze testen en eerst onderstaand oefenparcours afleggen met bijhorende tips!

1. Bereken m.b.v. een gepaste substitutie volgende onbepaalde integralen:
   a) $\int \cos(3x) \cdot \sin^5(3x)\, \mathrm{d}x$
   b) $\int 4x^2 \cdot \sqrt{1-x^3}\, \mathrm{d}x$
   c) $\int \frac{4\, \mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln(x)}}$
   d) $\int \frac{e^{2x}\, \mathrm{d}x}{e^{2x}+5}$

2. Bereken m.b.v. partiële integratie volgende onbepaalde integralen:
   a) $\int (7x-4) \cdot \sin(5x)\, \mathrm{d}x$
   b) $\int e^{-x}(3-2x)\, \mathrm{d}x$
   c) $\int (x+3) \cdot \ln(2x)\, \mathrm{d}x$
   d) $\int \cos(3x) \cdot x\, \mathrm{d}x$

3. Bereken volgende bepaalde integralen:
   a) $\int_{-5}^{-4} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2}$
   b) $\int_1^2 x^2 \cdot \ln(x)\, \mathrm{d}x$
   c) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin^2(x)\, \mathrm{d}x$
   d) $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}(x)\, \mathrm{d}x$

TIP bij oefening 1, 2 en 3: Om bovenstaande integralen op te lossen, kan je terugvallen op heel wat technieken die beschreven staan in de MOOC, gaande van bijzondere onbepaalde integralen + eenvoudige rekenregels (6.2.4 tot 6.2.6), het berekenen van bepaalde integralen (6.2.7 tot 6.2.9), de substitutiemethode (6.3.1 tot 6.3.7) tot uiteindelijk de methode van partiële integratie (6.3.9 tot 6.3.15).

4. Reken de volgende onbepaalde integralen uit (gemengde opdrachten):

a) $\int \left(\frac{5}{x^3} + 2x - x^{3/4}\right) \mathrm{d}x$

b) $\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x$

c) $\int \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(4x)}$

e) $\int (5x-1)^{\frac{2}{5}}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$

g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-3x}$

h) $\int x^2 \sin(2x^3-1)\,\mathrm{d}x$

i) $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$

j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x^2}}$

k) $\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

l) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

m) $\int \frac{3x^2-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

n) $\int x\,\mathrm{Bgtg}(x)\,\mathrm{d}x$

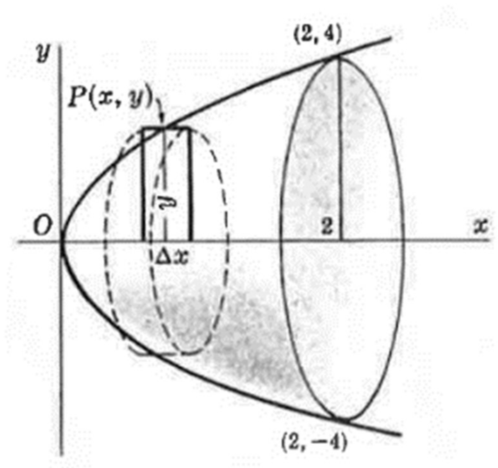
o) $\int \frac{\mathrm{Bgsin}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

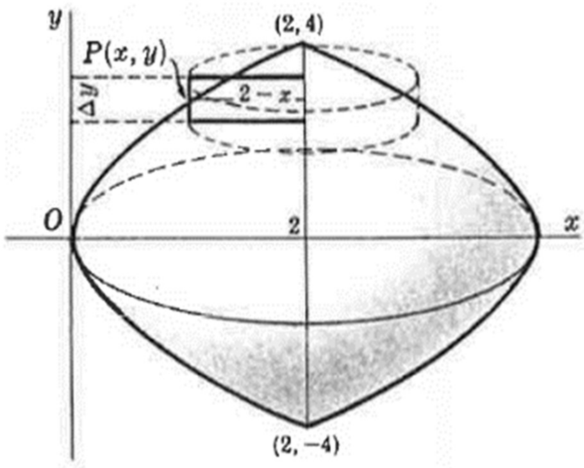
p) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

5. Bereken volgende oppervlakten (maak ook een schets van de oppervlakte):
   a) tussen volgende drie rechten: $y = 3x+1, y = x+2$ en $y = -x+4$.
   b) binnen de kromme $y^2 = x^2 - x^4$.

TIP bij oefening 5: Bekijk het filmpje in de MOOC over het berekenen van oppervlakten met bepaalde integralen (6.2.10) + twee voorbeelden (6.2.11).

6. Bepaal de inhoud van het lichaam dat ontstaat door de oppervlakte tussen de parabool $y^2 = 8x$ en de rechte $x = 2$ in het eerste kwadrant, te laten wentelen om de x-as (zie onderstaande linkse figuur).





7. Bepaal de inhoud van het lichaam dat ontstaat door de oppervlakte tussen de parabool $y^2 = 8x$ en de rechte $x = 2$ te laten wentelen om deze verticale rechte (zie bovenstaande rechtse figuur).

TIP bij oefening 6 en 7: De meest bekende omwentelingslichamen (cilinder, kegel en bol) staan bij elkaar gezet in module 4.1.4. Maar ook een paraboolkromme kan je op een gelijkaardige manier wentelen om een horizontale / verticale as. Het volume kan je dan bekijken als een oneindige som (= integraal) van flinterdunne cilinder-schijven met volume dV. Dit volume dV is gelijk aan $\pi r^2 \, \mathrm{d}x$ voor de linkerfiguur en $\pi r^2 \, \mathrm{d}y$ voor de rechterfiguur. Waar is de straal r dan respectievelijk aan gelijk?

8. Stel $a = \frac{dv}{dt}$ en $v = \frac{ds}{dt}$. Zoek s(t) indien je weet dat :
   a) $a = t^2 + 1, v(0) = 0$ en $s(0) = 1.$
   b) $a = \cos(t), v(0) = 1$ en $s(0) = 0.$
   c) $a = 3t, v(1) = 0$ en $s(10) = 30.$
   d) $a = \begin{cases} 10, & 0 \leq t < 10 \\ -2, & 10 \leq t \leq 60 \end{cases}, v(0) = 0$ en $s(0) = 0.$

TIP bij oefening 8: Om deze “mechanische” vraagstukken op te lossen ga je twee keer na elkaar een integraal moeten uitrekenen. De integratieconstanten die hierbij verschijnen, kan je vastleggen met behulp van de extra info die gegeven is.

BEKNOPTE OPLOSSINGEN

1. a) $\frac{\sin^6(3x)}{18} + c$; b) $\frac{-8}{9}\sqrt{(1-x^3)^3} + c$;

   c) $8\sqrt{\ln(x)} + c$; d) $\frac{1}{2} \cdot \ln(e^{2x} + 5) + c$

2. a) $\frac{(4-7x)\cdot\cos(5x)}{5} + \frac{7\sin(5x)}{25} + c$; b) $(2x-1) \cdot e^{-x} + c$

   c) $\ln(2x) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) - \left(\frac{x^2}{4} + 3x\right) + c$; d) $\frac{x\cdot\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + c$

3. a) $1/6$; b) $\frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9} = 1{,}07061$; c) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}614$; d) $-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}347$

4. a) $\frac{-5}{2x^2} + x^2 - \frac{4}{7}x^{7/4} + c$

   b) $-\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c$

   c) $\frac{1}{3}e^{3x-1} + c$

   d) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}(4x) + c$

   e) $\frac{1}{7}(5x-1)^{7/5} + c$

   f) $\ln|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + c$

   g) $-\frac{1}{3}\ln|1-3x| + c$

   h) $-\frac{1}{6}\cos(2x^3 - 1) + c$

   i) $\mathrm{Bgtg}(\sin x) + c$

   j) $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c$

   k) $\sin(\ln(x)) + c$

   l) $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 3| + c$

   m) $\frac{3}{2}x^2 - 3x + 2\ln|x+1| + c$

   n) $\frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{Bgtg}(x) - \frac{x}{2} + c$

   o) $2\sqrt{x}\,\mathrm{Bgsin}(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x} + c$

   p) $x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + c$

5. a) $1/8$; b) $4/3$
6. 16π
7. $256\pi/15$
8. a) $s = \frac{t^4}{12} + \frac{t^2}{2} + 1$; b) $s = -\cos(t) + t + 1$; c) $s = \frac{t^3}{2} - \frac{3t}{2} - 455$

   d) $s = \begin{cases} 5t^2, & 0 \le t < 10 \\ -t^2 + 120t - 600, & 10 \le t \le 60 \end{cases}$