

# Deel 2 Complexe getallen

## 1 Tweedimensionale Euclidische ruimte

### 1.1 Optelling, verschil en scalaire vermenigvuldiging

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$  is de verzameling van alle koppels reële getallen.

Zoals we ons de reële getallen kunnen voorstellen als de punten van een lijn waarop 0 en 1 zijn vastgelegd, zo kunnen we ons de paren reële getallen voorstellen als punten van een vlak waarin een rechthoekig assenstelsel is gekozen.

In  $\mathbb{R}^2$  wordt de optelling, het verschil en de scalaire vermenigvuldiging als volgt gedefiniëerd:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}: (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

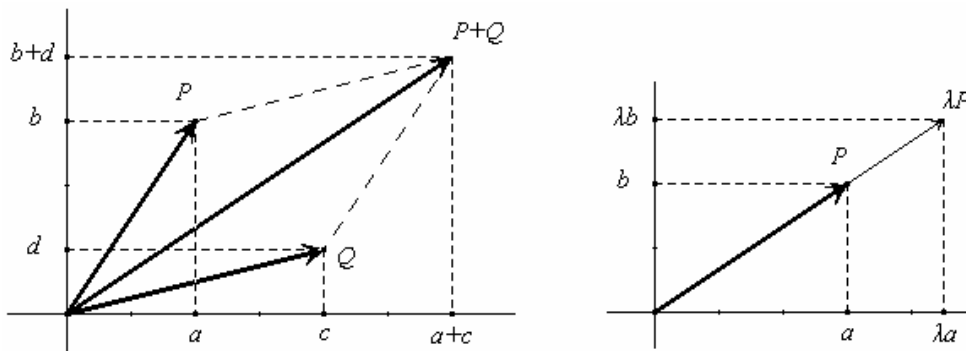
$$\forall a,b \in \mathbb{R}: (a,b) - (c,d) = (a-c, b-d)$$

$$\forall a,b, \lambda \in \mathbb{R}: \lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Elk paar  $(a,b)$  bepaalt één punt  $P$  in het vlak en  $P$  kan je beschouwen als het eindpunt van de vector  $\overline{OP} = \vec{P}$ .

Een som van twee koppels is als een som van twee vectoren  $\overline{OP}$  en  $\overline{OQ}$  die bepaald wordt met een parallellogramconstructie, waarbij de twee vectoren de zijden zijn en de diagonaal de somvector is.

$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$  is het koppel dat overeenkomt met het eindpunt van  $\lambda \cdot \overline{OP}$ .



### 1.2 Vermenigvuldiging

We definiëren in  $\mathbb{R}^2$  een distributieve vermenigvuldiging met als doel eigenschappen zoals commutativiteit, associativiteit,..... die gelden in  $\mathbb{R}$  te behouden.

Later in dit hoofdstuk wordt deze definitie duidelijk!

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}: (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

### 1.3 Eigenschappen

Is er een eenheidselement voor deze vermenigvuldiging?

$$\forall a,b,x,y \in \mathbb{R}:$$

$$(a,b) \cdot (x,y) = (a,b) = (x,y) \cdot (a,b) \Leftrightarrow \overset{\text{definitie}}{(ax - by, bx + ay)} = (a,b) \Leftrightarrow \overset{\text{gelijkheid koppels}}{\begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases}}$$

Het oplossen van dit stelsel met de methode van Gauss geeft:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} a & -b & a \\ b & a & b \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

**BESLUIT**

Voor elk element van  $\mathbb{R}^2$  is  $(1,0)$  het eenheidselement.

Is er een invers element voor de vermenigvuldiging?

$\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$ :

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) = (x, y) \cdot (a, b) \stackrel{\text{definitie}}{\Leftrightarrow} (ax - by, bx + ay) = (1, 0) \stackrel{\text{gelijkheid koppels}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Oplossen met Gauss-Jordan geeft:

$$(i) \quad a \neq 0 \text{ of } b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0: \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a}{a^2 + b^2} \\ 0 & 1 & \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{array} \right].$$

(ii)  $a = 0$  en  $b = 0$ : in dit geval heeft het stelsel geen oplossingen.

**BESLUIT**

In  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  heeft elk element een invert element nl.  $(a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ .

## 1.4 Een bijzondere deelverzameling van $\mathbb{R}^2$

Beschouw de verzameling  $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ . Er geldt voor

de optelling:  $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ ,

de scalaire vermenigvuldiging:  $\lambda \cdot (a, 0) = (\lambda a, 0)$  en

de vermenigvuldiging:  $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0)$ .

De optelling, de scalaire vermenigvuldiging en de vermenigvuldiging van koppels  $(a, 0)$  verloopt analoog als met reële getallen. We identificeren daarom deze koppels met de reële getallen:  $\forall a \in \mathbb{R} : a \equiv (a, 0)$ .

## 2 Definitie van complexe getallen

Pas vanaf 1800 werd door de Ierse wiskundige Hamilton het rekenen met complexe getallen tot een volledig algebraïsch systeem opgezet door ze als koppels reële getallen op te vatten.

## 2.1 En wat met de vergelijking $x^2 = -1$ ?

Het oplossen van deze vergelijking in  $\mathbb{R}$ ,  $x = \pm\sqrt{-1}$ , is absurd. We kennen geen enkel getal waarvan het kwadraat negatief is.

En als we nu rekenen met koppels?

Is er een koppel,  $(a, b)$ , waarvan het kwadraat gelijk is aan  $(-1, 0)$ ?

$$(a, b) \cdot (a, b) = (-1, 0) \stackrel{\text{definitie}}{\Leftrightarrow} (a^2 - b^2, 2ab) = (-1, 0) \stackrel{\text{gelijkheid koppels}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft enkel oplossingen indien  $a = 0$  en  $b \neq 0$  nl.  $b = -1$  of  $b = 1$ .

Het probleem  $x^2 = -1$  is oplosbaar als de onbekende  $x$  een koppel is en als we  $-1$  identificeren met het koppel  $(-1, 0)$ .

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = (0, 1) \text{ of } x = (0, -1) = -(0, 1)$$

Naar analogie met het oplossen van vergelijkingen in  $\mathbb{R}$  noemen we ook hier de koppels  $(0, 1)$  en  $-(0, 1)$  de vierkantswortels van  $-1 = (-1, 0)$ .

Het koppel  $(0, 1)$  heeft dus een bijzondere betekenis.

## 2.2 Definitie

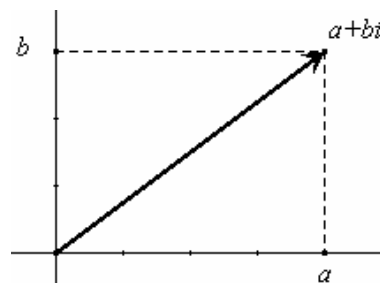
We kiezen voor dit bijzondere koppel een nieuw symbool:  $i = (0, 1)$ . De wiskundige Euler vond dat dit getal alleen in de verbeelding kon bestaan en noemde het daarom imaginair.

We kunnen dan ieder koppel als volgt noteren:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi.$$

Deze nieuwe en verkorte notatie noemen we de Cartesische schrijfwijze van een complex getal.

De verzameling  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  noemen we de verzameling van de complexe getallen en noteren we met het symbool  $\mathbb{C}$ .



Voor  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  noemen we  $a$  het reële deel en  $b$  het imaginaire deel van  $z$ .

Notatie:  $a = \operatorname{Re} z$  en  $b = \operatorname{Im} z$ .

$a + bi = (a, b)$  is een punt van het vlak dat de som is van het punt  $(a, 0) = a$  op de  $x$ -as en het punt  $(0, b) = bi$  op de  $y$ -as. Daarom noemen we de  $x$ -as de reële as en de  $y$ -as de imaginaire as.

Op deze manier kunnen we de  $x$ -as identificeren met de verzameling van de reële getallen en bekomen zo dat  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

### 2.3 Voordeel van deze schrijfwijze $a + bi$

Daar de elementaire eigenschappen van de bewerkingen blijven gelden zoals in  $\mathbb{R}$  en  $i^2 = -1$  geldt voor de vermenigvuldiging:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : (a + bi) \cdot (c + di) = ac + bd i^2 + bc i + ad i = ac - bd + i(ad + bc).$$

Dit stemt helemaal overeen met de distributieve vermenigvuldiging van koppels maar is erg handig om te rekenen.

$$\text{In deze nieuwe notatie geldt: } \forall a, b \in \mathbb{R} : (a + bi)^{-1} = \frac{1}{a - bi} \cdot \frac{a - bi}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

### 2.4 Opmerking

Een uitzondering op de analogie met de reële getallen zijn de ordeningseigenschappen.  $\mathbb{R}$  noemt men totaal geordend omdat met de orderrelatie  $\leq$  men de reële getallen kan ordenen van klein naar groot. Iedere twee verschillende reële getallen,  $x$  en  $y$ , kunnen met elkaar vergeleken worden:  $x \leq y$  of  $y \leq x$ .

Een dergelijke relatie bestaat echter niet voor  $\mathbb{C}$ .

### 2.5 Deling van complexe getallen

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : \frac{a + bi}{c + di} = (a + bi) \cdot (c + di)^{-1} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}.$$

### 2.6 Complex toegevoegde of geconjugeerde van $z$

Voor iedere complex getal  $z = a + bi$  definiëren we het complex toegevoegde als het complex getal  $\bar{z} = a - bi$ .

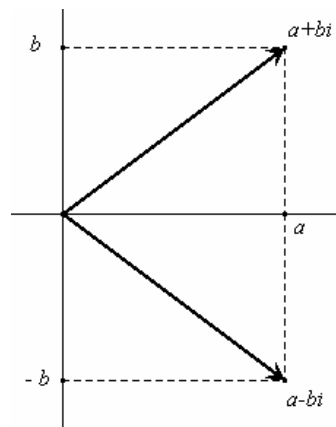
Merk op dat  $z$  en  $\bar{z}$  mekaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de reële as en dat

$$z + \bar{z} = 2a \quad (\text{reëel})$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \quad (\text{reëel})$$

Het uitvoeren van een deling van twee complexe getallen komt neer op het vermenigvuldigen en delen met het complex toegevoegde van de noemer :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} \quad \text{en } z_2 \cdot \bar{z}_2 \text{ is reëel.}$$



### 2.7 Rekenen met complexe getallen en de TI-83/84 Plus

Het rekenwerk met complexe getallen in toepassingen kan sterk vereenvoudigd worden door gebruik te maken van de TI-83/84 Plus.

Het complex getal  $i$  bevindt zich boven de toets van het decimale punt (eerst op 2nd drukken en dan op het decimale punt: 2nd [ i ]).

Enkele voorbeelden:

```
i^2
(1+2i)-(2-3i) -1
(1+2i)*(2-3i) -1+5i
8+i
```

```
1/i -i
1/(1+i)
1/(1+i)*Frac .5-.5i
1/2-1/2i
```

```
(2-3i)/(5+7i)
-.1486486486-.3...
Ans>Frac
-11/74-29/74i
(1-i)^10
-32i
```

### 3 Meetkundige voorstelling van complexe getallen

#### 3.1 Complexe getallen als punten van een vlak

Complexe getallen zijn geïntroduceerd als punten van een vlak t.o.v. een ortho-normaal assenstelsel. Een dergelijk assenstelsel is nodig omdat we met afstanden en hoeken gaan werken.

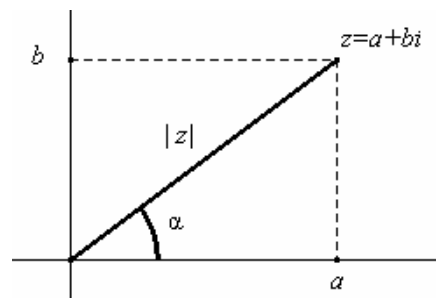
De reële getallen vormen de deelverzameling van punten van de vorm  $a = (a, 0) = a + 0i$  zodat elk reëel getal een punt voorstelt op de reële as van het complexe vlak of vlak van Gauss (1777-1855).

#### 3.2 Goniometrische of polaire vorm van een complexe getal

Ieder complex getal  $z = a + bi$  is volledig bepaald door het koppel reële getallen  $(a, b)$ . Met ieder complex getal komt één punt van het vlak overeen en omgekeerd.

De ligging van ieder complex getal  $z$ , verschillende van nul, is ook ondubbelzinnig bepaald door:

- de afstand van  $z$  tot de oorsprong (Notatie:  $|z|$ ) en
- de hoek  $\alpha$  tussen de halfrechte  $oz$  en het positieve been van de reële as.



$|z|$  noemen we de modulus van het complex getal  $z$ .

Volgens de stelling van Pythagoras geldt:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

De hoek  $\alpha$  met als beginbeen het positieve deel van de reële as en als eindbeen  $oz$  bepaalt het argument van het complex getal  $z$ . Deze hoek  $\alpha$  heeft oneindig veel waarden, nl.  $\alpha + 2k\pi$  met  $k \in \mathbb{Z}$ . De waarden noemen we de argumenten van  $z$  en noteren we als volgt:  $\arg z = \alpha + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

De hoofdwaarde van  $z$ ,  $\text{Arg } z$ , is het argument waarvoor geldt:  $0 \leq \text{Arg } z < \pi$ .

Voor een argument  $\alpha$  van  $z$  geldt  $\begin{cases} a = |z| \cos \alpha \\ b = |z| \sin \alpha \end{cases}$  zodat  $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ .

**Definitie:** Voor een complex getal  $z \neq 0$  met modulus  $r$  en argument  $\varphi$  geldt dat  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Deze schrijfwijze noemt met de goniometrische of polaire vorm van een complex getal. Het koppel  $(r, \varphi)$  noemt men de poolcoördinaten van het punt  $z$ .

### Voorbeeld

Voor  $z = -1 - i$  geldt  $|z| = \sqrt{2}$  en  $\tan \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$  met  $k \in \mathbb{Z}$ .

Merk op dat  $z$  gelegen is in het derde kwadrant zodat de goniometrische vorm van  $z$  gelijk is aan:  $z = -1 - i = \sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ .

### 3.3 De formule van Euler

Het getal  $e$ , genoemd naar Leonard Euler (1707-1783), definiëren we als het reële getal waarvoor geldt:  $\ln e = 1$ .

Er geldt dat  $e$  irrationaal is en  $e = 2,7182818284590452\dots$

Bovendien geldt:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$ . Men kan bewijzen dat  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

Vanzelfsprekend valt dit bewijs buiten de leerstof van het secundair onderwijs. Maar deze eigenschap kan beschouwd worden als een nieuwe, derde notatie van een complex getal.

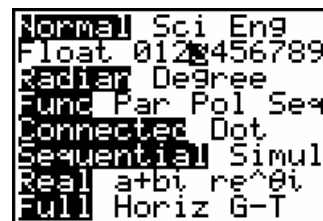
Voor  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  geldt  $z = re^{i\varphi}$ .

De manier van noteren noemen we de formule van Euler.

### 3.4 Complexe getallen en de TI-83/84 Plus

De TI-83/84 Plus heeft voor complexe getallen twee modi:

- $a+bi$  → cartesische coördinaten
- $re^{i\theta}$  → poolcoördinaten



Een complex getal wordt steeds bewaard in de cartesische mode maar kan altijd in de polaire vorm ingevoerd worden. Voor de twee onderstaande voorbeelden stellen we de drijvende komma-mode (FLOAT) in op 3. In wat volgt vermelden we niet meer in welke FLOAT-mode de grafische rekenmachine staat.

Mode Real of a+bi	Mode $re^{i\theta}$
$\pi/2$	$\pi/2$
1.571	1.571
$\sqrt{(2)}i$	$\sqrt{(2)}i$
1.414i	$1.414e^{(1.571i)}$
$\sqrt{(2)}e^{((\pi/2)i)}$	$\sqrt{(2)}e^{((\pi/2)i)}$
1.414i	$1.414e^{(1.571i)}$

Het MATH-menu bevat een deelmenu CPX met de volgende functies specifiek voor complexe getallen.

```
MATH NUM PRB
1: conj(
2: real(
3: imag(
4: angle(
5: abs(
6: ▶ Rect
7: ▶ Polar
```

- 1: conj( complex toegevoegde
- 2: real( reële deel
- 3: imag( imaginaire deel
- 4: angle( argument
- 5: abs( modulus
- 6: ▶ Rect omzetting in cartesische vorm
- 7: ▶ Polar omzetting in polaire vorm

Enkele voorbeelden:

```
3-4i→Z
conj(Z) 3-4i
real(Z) 3+4i
3
```

```
real(Z) 3
imag(Z) -4
abs(Z) 5
```

```
abs(Z) 5
angle(1+i) .7853981634
π/4 .7853981634
```

### 3.5 Bewerkingen met complexe getallen in goniometrische vorm

Beschouw de complexe getallen  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  en  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ .

#### 3.5.1 Vermenigvuldiging

Er geldt :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Modulus van het produkt = produkt van de moduli  
 Argument van het produkt = som van de argumenten

#### 3.5.2 Deling

Na wat rekenwerk volgt:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ .

Modulus van het quotiënt = quotiënt van de moduli  
 Argument van het quotiënt = verschil van de argumenten

#### 3.5.3 n-de macht

Voor  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  geldt  $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

#### 3.5.4 De formule van de Moivre

Voor een complex  $z$  met modulus gelijk aan 1 geldt:  $z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ .

Met de formule van de Moivre kan men zeer vlug de volgende goniometrische formules bewijzen.

$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + i(2 \sin \varphi \cos \varphi)$  en volgens de Moivre geldt:

$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ .

Hieruit volgt dat  $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$  en  $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ .

### 3.5.5 De formule van Euler

Het rekenwerk wordt met deze notatie weer vereenvoudigd. Voor  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  en

$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  geldt:  $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$  en  $(z_1)^{-1} = (r_1 e^{i\varphi_1})^{-1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\varphi_1}$ .

### 3.5.6 $n$ -de machtswortels

#### DEFINITIE

Voor ieder complex getal  $a$  definiëren we een  $n$ -de machtswortel ( $n \neq 0$ ) als een complex getal  $b$  waarvoor geldt dat  $b^n = a$ .

#### VOORBEELD

Welke complexe getallen zijn een vierkantswortel (2-de machtswortel) van  $-16$ ?

Het is duidelijk dat deze vraag weer niet is op te lossen in  $\mathbb{R}$ . Maar in  $\mathbb{C}$  heeft  $-16 = 16i^2$  twee vierkantswortels nl.  $-4i$  en  $4i$ .

#### EIGENSCHAP

Elk complex getal  $z \neq 0$  heeft  $n$   $n$ -de machtswortels.

Voor  $a = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  is  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  een  $n$ -de machtswortel van  $a$  indien:

$$\begin{aligned} z^n &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &\Downarrow \\ (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &\Downarrow \\ \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &\Downarrow \\ \rho^n = r \text{ en } n\varphi &= \alpha + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z} \\ &\Downarrow \\ \rho = \sqrt[n]{r} \text{ en } \varphi &= \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \text{ met } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

De  $n$ -de machts wortels van een complex getal  $a = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  zijn:

$$\boxed{\sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}}$$



Merk op dat we voor  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$   $n$  verschillende complexe getallen bekomen. Maar voor  $k = n$  krijgen we hetzelfde complex getal als voor  $k = 0$  en voor  $k = n+1$  hetzelfde als voor  $k = 1$ , ...

### OPMERKING

De moduli van de  $n$ -de machtswortels van een complex getal zijn gelijk. M.a.w. in het complexe vlak liggen de bijbehorende punten op een cirkel.

De argumenten bepalen de ligging op deze cirkel, telkens een hoek  $\frac{2\pi}{n}$  van mekaar.

Hieruit volgt dat de punten die de  $n$ -de machtswortels bepalen van een complex getal steeds een regelmatige  $n$ -hoek vormen.

### VOORBEELD

De vierde machtswortels van  $z = -8 - 8\sqrt{3}i = 16(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$  zijn:

$$\sqrt[4]{16} \left( \cos \left( \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

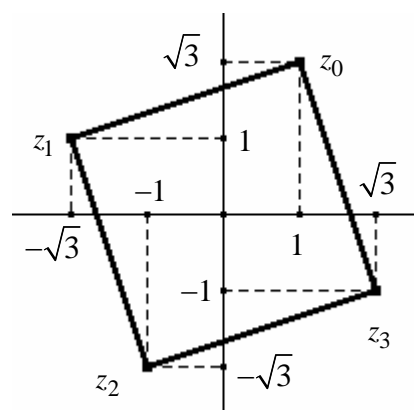
Uitgerekend geeft dit:

$$z_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$z_3 = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - i$$



### 3.5.7 Binomiaalvergelijkingen

Een binomiaalvergelijking in  $\mathbb{C}$  is een vergelijking van de vorm  $az^n + b = 0$  met  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  en  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Het oplossen van zo'n vergelijking  $az^n + b = 0$  komt neer op het berekenen van de  $n$ -de machtswortels van  $-\frac{b}{a}$  in  $\mathbb{C}$ .

### VOORBEELD

De oplossingen van  $z^3 = 8i = 8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$  zijn:

$$z_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i \text{ en}$$

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = -2i.$$

Of nog:  $z^3 = 8i \Leftrightarrow r^3 e^{3i\varphi} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow r^3 = 8$  en  $\varphi = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 3.5.8 $n$ -de machtswortels en binomiaalvergelijkingen met de TI-83/84 Plus

We bekijken even wat de resultaten zijn van  $(-4)^{\frac{1}{2}}$  in de verschillende modes:

Real	a+bi	re <sup>θ</sup> i
$(-4)^{(1/2)}$	$(-4)^{(1/2)}$ $\sqrt{-4}$	$(-4)^{(1/2)}$ $2.000e^{(1.571i)}$ $\sqrt{-4}$ $2.000e^{(1.571i)}$
ERR:NONREAL ANS Quit Goto		

Om beide vierkantswortels van  $-4$  te berekenen maken we gebruik van de Flash-applicatie *Polynomial Root Finder and Simultaneous Equation Solver* (gratis te downloaden via [education.ti.com](http://education.ti.com)). Een handleiding van deze applicatie kan gedownload worden via [education.ti.com/guides](http://education.ti.com/guides).

Hiermee lossen we de vergelijking  $x^2 = -4$  op.

Na het opstarten van de applicatie kiezen we de optie 1: Poly Root Finder. Ook hier kunnen we dezelfde drie modi instellen.

We voeren de graad en de coëfficiënten van de vergelijking in (bevestigen door op [ENTER] te drukken). De grafische toetsen zijn in deze applicatie functietoetsen. Druk op [GRAPH] (= SOLVE) om de vergelijking op te lossen.

<b>POLY ROOT FINDER</b> 1: Poly Root Finder 2: Simult Ean Solver 3: About 4: Poly Help 5: Simult Help 6: Quit Poly Smlt	<b>POLY ROOT FINDER</b> Degree of Poly = 2	$a_2x^2+a_1x+a_0=0$ $a_2=1$ $a_1=0$ $a_0=-4$
MAIN DEGR CLR LOAD SOLVE	MAIN DEGR CLR LOAD SOLVE	MAIN DEGR CLR LOAD SOLVE

Ook hier kunnen we de vergelijking oplossen in de verschillende modi.

Real	a+bi	re <sup>θ</sup> i
$a_2x^2+a_1x+a_0=0$ $x_1=NONREAL$ $x_2=NONREAL$	$a_2x^2+a_1x+a_0=0$ $x_1=2i$ $x_2=-2i$	$a_2x^2+a_1x+a_0=0$ $x_1=2.000e^{(1.571i)}$ $x_2=2.000e^{(-1.571i)}$
MAIN COEFS STO STOX STOY	MAIN COEFS STO STOX STOY	MAIN COEFS STO STOX STOY

We bekijken als tweede voorbeeld de vergelijking  $x^3 - 8 = 0$ .

Real	a+bi	re <sup>θ</sup> i
$a_3x^3+...+a_1x+a_0=0$ $a_3=1$ $a_2=0$ $a_1=0$ $a_0=-8$	$a_3x^3+...+a_1x+a_0=0$ $x_1=2.00$ $x_2=NONREAL$ $x_3=NONREAL$	$a_3x^3+...+a_1x+a_0=0$ $x_1=2.00$ $x_2=2.00e^{(2.09i)}$ $x_3=2.00e^{(-2.09i)}$
MAIN DEGR CLR LOAD SOLVE	MAIN COEFS STO STOX STOY	MAIN COEFS STO STOX STOY

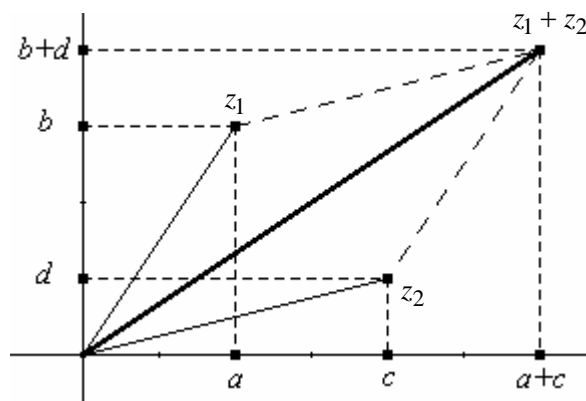
De oplossingen kunnen bewaard worden in een lege lijst met STOx om na het sluiten van de applicatie mee verder te rekenen.

	Real of a+bi	$re^{\theta i}$
<pre> a3x^3+...+a1x+a0=0 x1=2.00 x2=-1.00+1.73i x3=-1.00-1.73i  STOx List=L1 MAIN COEF3 STOa STOx STOy           </pre>	<pre> L1(1)      2.00 L1(2) -1.00+1.73i L1(3) -1.00-1.73i           </pre>	<pre> L1(1)      2.00 L1(2)      2.00 L1(2) 2.00e^(2.09i) L1(3) 2.00e^(-2.09i)           </pre>

## 4 Grafische voorstelling van bewerkingen

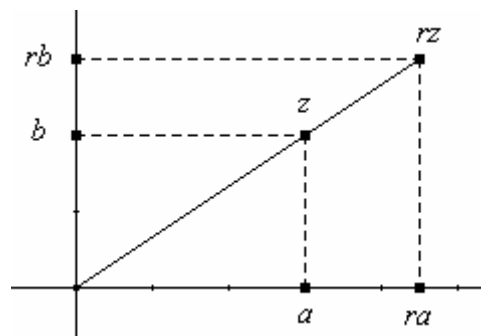
### 4.1 Som

De som van  $z_1 = a + bi$  en  $z_2 = c + di$ ,  $z_1 + z_2$ , bekomt men door een translatie (verschuiving) van  $z_1$  over  $(c, d)$  of een verschuiving van  $z_2$  over  $(a, b)$ .



### 4.2 Scalaire vermenigvuldiging

De scalaire vermenigvuldiging van  $z = a + bi$  met  $r \in \mathbb{R}$ ,  $rz$ , is het beeld van  $z$  voor een homothetie met als centrum de oorsprong en als factor  $r$ .



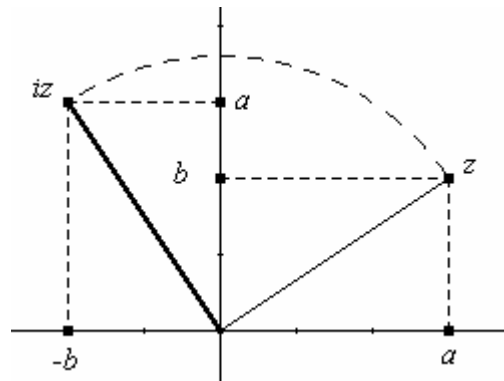
### 4.3 Vermenigvuldiging van $i$ en $z$

Stel  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Er geldt  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$  zodat

$$i \cdot z = r \left( \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Vertrekkende van  $z$  bekomt men  $iz$  door een rotatie (draaiing) van  $z$  over  $90^\circ$  rond de oorsprong in tegenwijzerzin.

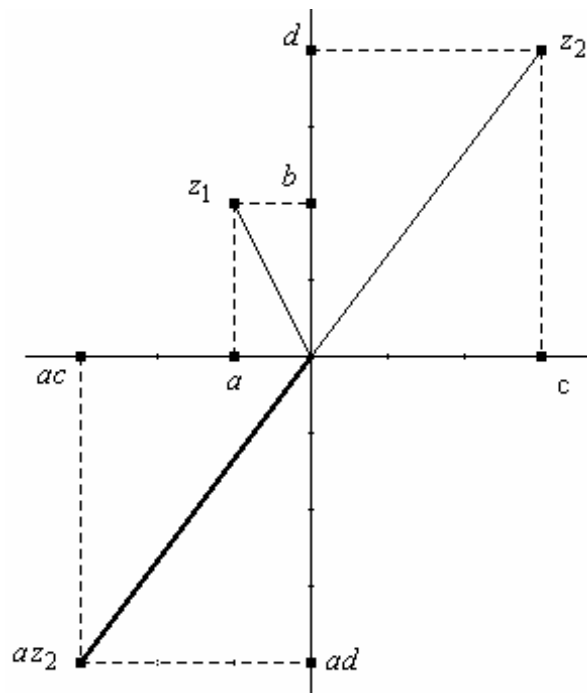


### 4.4 Vermenigvuldiging

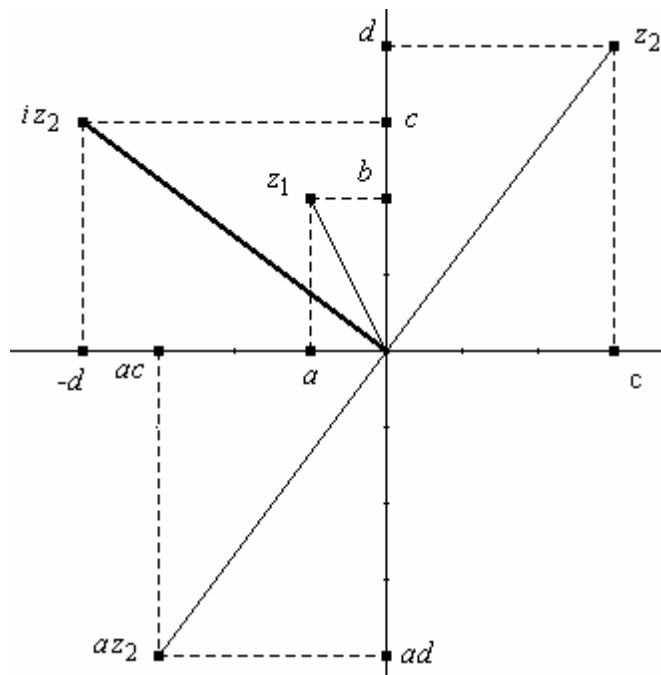
De vermenigvuldiging van  $z_1 = a + bi$  en  $z_2 = c + di$  kan als volgt bekeken worden:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot (c + di) + bi \cdot (c + di).$$

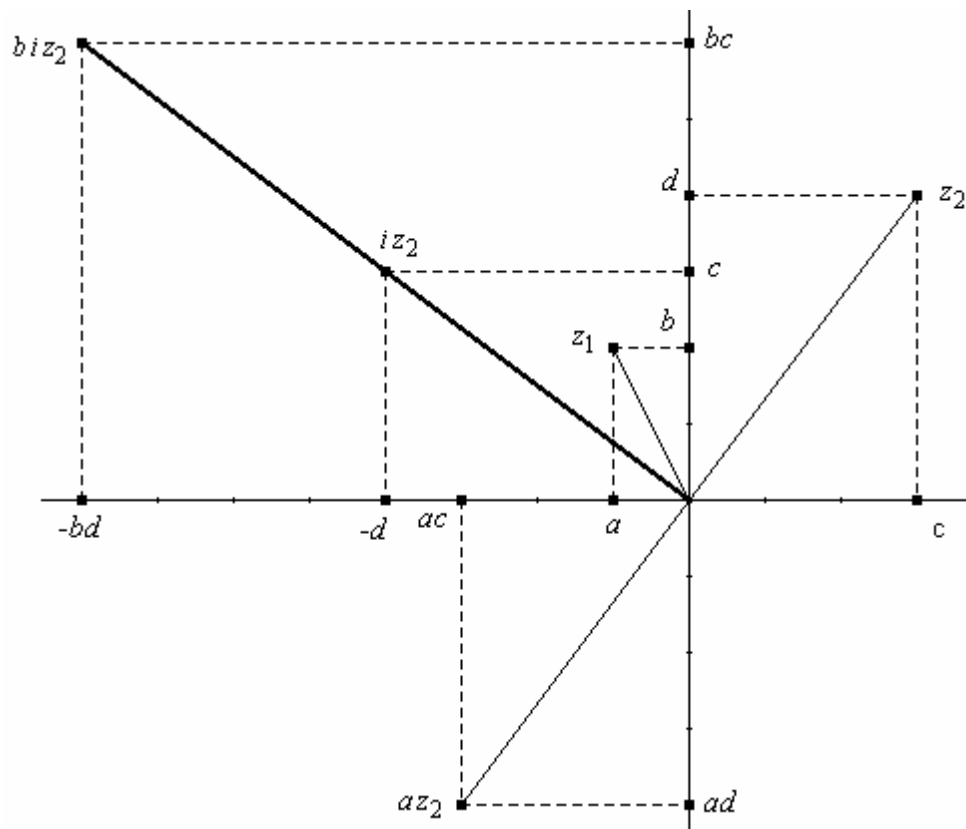
1<sup>e</sup> STAP:  $a \cdot (c + di)$  is het beeld van  $z_2$  voor de homothetie met als factor  $a$  en als centrum de oorsprong.



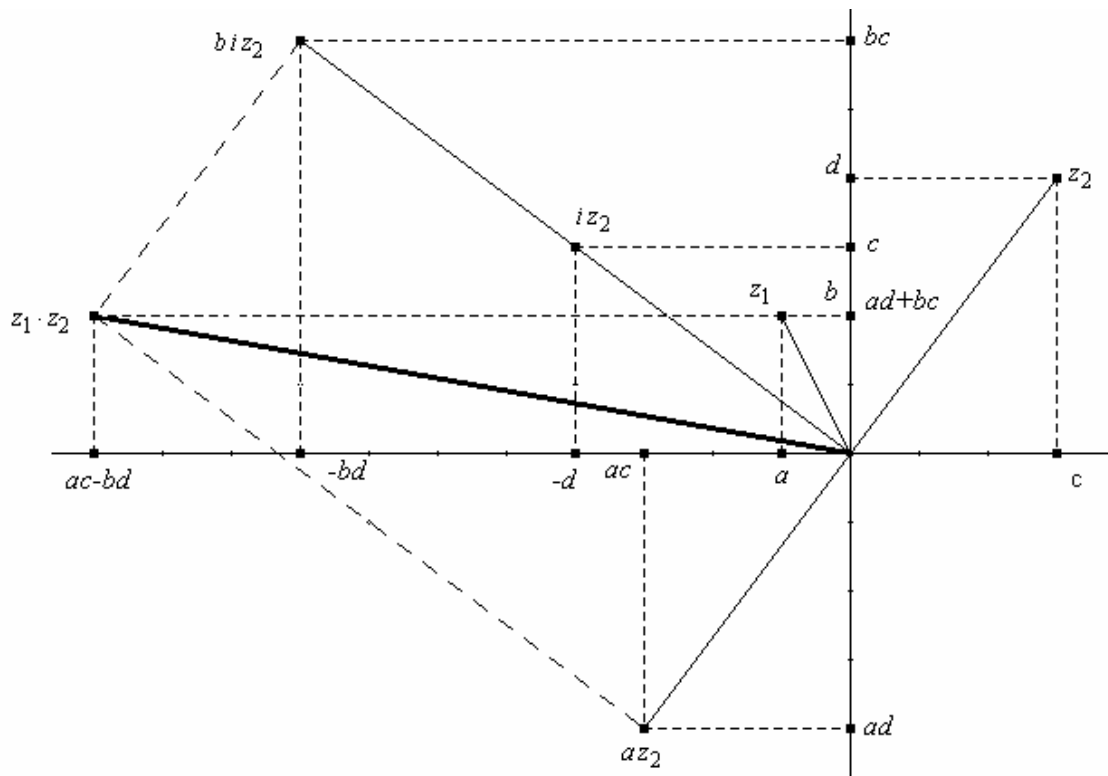
2<sup>E</sup> STAP: Voor het bepalen van  $i \cdot (c + di)$  roteren we  $z_2$  over  $90^\circ$ , t.o.v. de oorsprong in tegenuurwijzerzin.



3<sup>E</sup> STAP:  $bi \cdot (c + di)$  is het beeld van  $iz_2$  voor de homothetie met als factor  $b$  en als centrum de oorsprong.



4<sup>E</sup> STAP:  $z_1 \cdot z_2$  is de diagonaal van het parallellogram met als zijden  $az_2$  en  $bi \cdot z_2$ .



## 5 Eenvoudige complexe functies

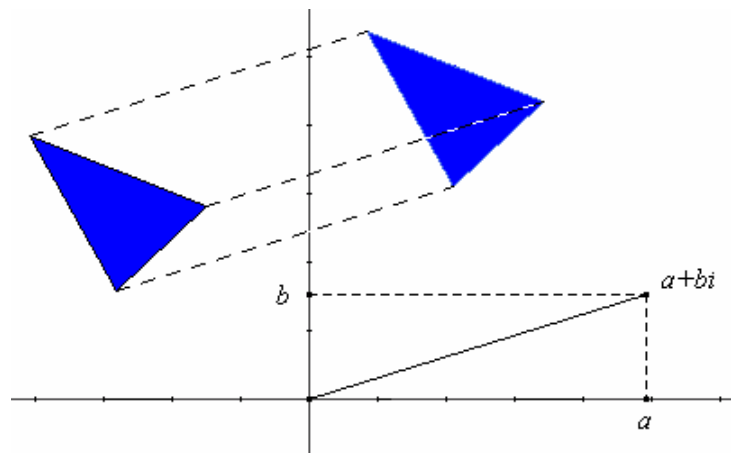
Bij complexe functies is zowel het domein als het beeld een deelverzameling van  $\mathbb{C}$ .

Toch kan men in eenvoudige gevallen het domein en het beeld in één vlak weergeven.

### 5.1 Functies van de eerste graad

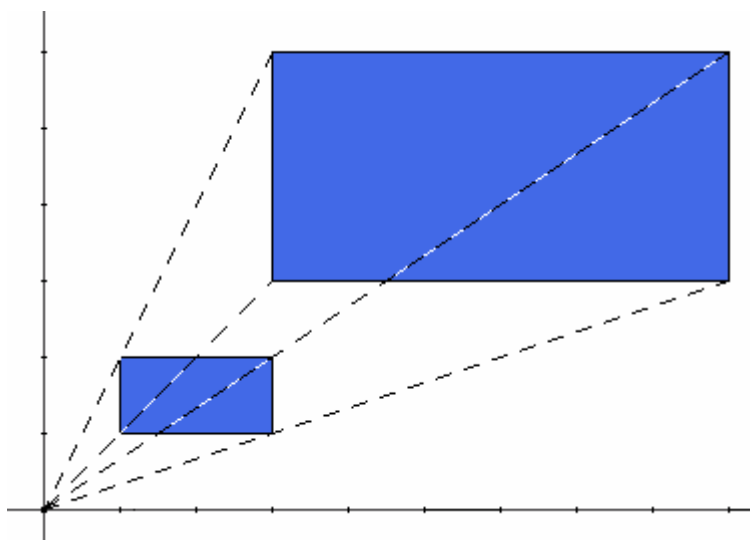
#### 5.1.1 $f(z) = z + (a + bi)$

Bij elke complex getal  $z$  wordt  $a + bi$  opgeteld en dus wordt elke  $z$  verschoven over  $(a, b)$ . Neem bij deze functie bijvoorbeeld als domein een driehoek. Het bereik is dan ook een driehoek.



#### 5.1.2 $f(z) = az, a \in \mathbb{R}_0$

Elk complex getal  $z$  wordt vermenigvuldigd met  $a$  (homothetie met als centrum de oorsprong en als factor  $a$ )



### 5.1.3 $f(z) = cz, c \in \mathbb{C}_0$

Voor  $c = a + bi$  is het beeld van elk complex getal  $z$  is de som van (zie punt 4.4):  
het beeld van  $z$  voor een homothetie met centrum de oorsprong en factor  $a$  en  
het beeld van  $iz$  voor een homothetie met centrum de oorsprong en factor  $b$ .

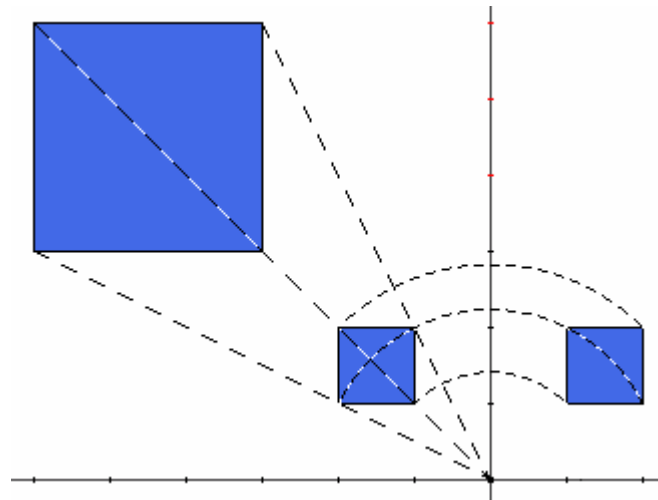
Hoe zal in dit geval het beeld van een vierkant eruit zien?

Om hier een antwoord op te geven schrijven we de parameter  $c$  en de variabele  $z$  van het functievoorschrift in hun goniometrische vorm.

Stel  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  en  $c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  dan bekomen we:

$$f(z) = c \cdot z = r\rho(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)).$$

Het bepalen van het beeld van een vierkant in het complexe vlak voor de functie  $f$  komt neer op het uitvoeren van een draaivermenigvuldiging – d.w.z. een draaiing rond de oorsprong (over een hoek  $\alpha$ ) gevolgd door een vermenigvuldiging (homothetie) met als centrum de oorsprong en als factor  $|c|$ .



### 5.1.4 $f(z) = cz + d, c \in \mathbb{C}_0$

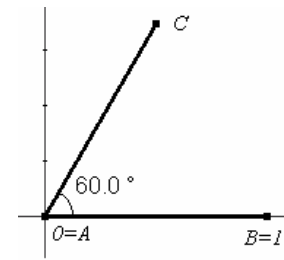
Deze eerstegraadsfunctie bepaalt in het complexe vlak een draaiing over een hoek  $\alpha$  (argument van  $c$ ) rond de oorsprong, gevolgd door een vermenigvuldiging (met als centrum de oorsprong en als factor  $|c|$ ) en daarna een translatie (met als verplaatsing  $d$ ).



VOORBEELD

- De functie  $f_1(z) = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot z$  zorgt voor een draaiing rond de oorsprong over een hoek van  $60^\circ$  in tegenwijzerzin.

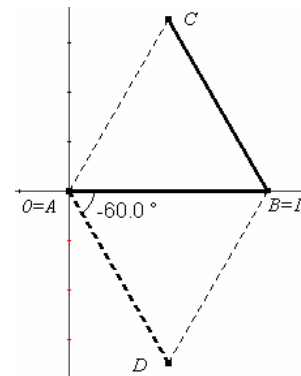
Het beeld van het lijnstuk  $[AB]$  is gelijk aan het lijnstuk  $[AC]$ . Om het rekenwerk te vereenvoudigen kozen we  $B = 1$ .



Het complex getal behorende bij het punt  $C$  is  $f_1(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

- We zoeken nu het functievoorschrift van een tweede functie  $f_2$  die de draaiing van het lijnstuk  $[AB]$  uitvoert rond  $B$  over een hoek van  $60^\circ$  in wijzerszin, dus over hoek van  $-60^\circ$ .

Er geldt dat we deze draaiing over  $-60^\circ$  met als centrum  $B$  kunnen vervangen door een draaiing van  $-60^\circ$  rond de oorsprong gevolgd door een translatie.



Het functievoorschrift van  $f_2$  is van de vorm:

$$f_2(z) = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot z + d = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot z + d.$$

Daar  $f_2(B) = B$  geldt:  $f_2(1) = 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + d \Leftrightarrow d = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

M.a.w.  $f_2(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

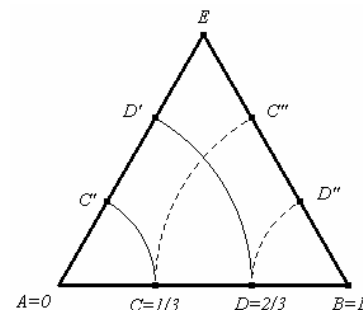
- We verdelen het lijnstuk  $[AB]$  in drie gelijke delen en berekenen de punten  $C'$ ,  $D'$ ,  $C''$  en  $D''$  met de functies  $f_1$  en  $f_2$ .

$$C' = f_1\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$$D' = f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

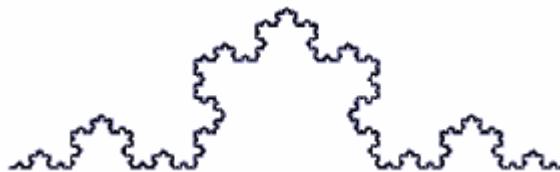
$$C'' = f_2\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$D'' = f_2\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$



## 5.2 De Koch-kromme

Helge von Koch (1870-1924) was een Zweedse wiskundige die in 1904 de kromme ontdekte die de dag van vandaag de Koch-kromme genoemd wordt.



De Koch-kromme is een voorbeeld van de ontdekking van Weierstrass (1815-1897) die in die periode een crisis veroorzaakte in het wiskundig denken. Hij ontdekte een kromme die nergens afleidbaar is.

De meetkundige constructie van de Koch-kromme verloopt als volgt.

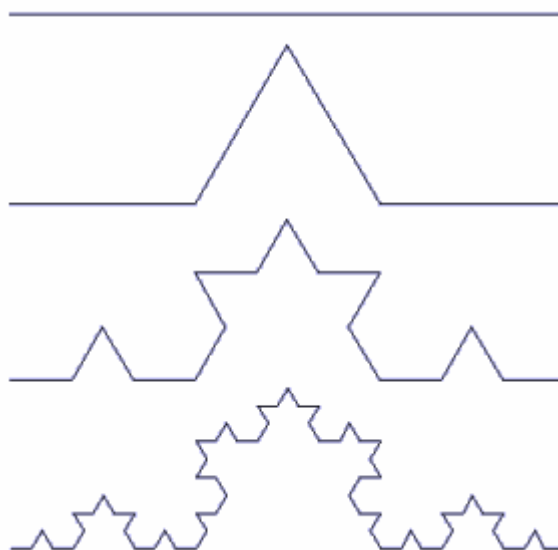
We starten met een lijnstuk.

We verdelen dit lijnstuk in drie gelijke delen en het middelste gedeelte vervangen we door een gelijkzijdige driehoek zonder basis.

In een volgende stap passen we dezelfde constructie toe op ieder lijnstuk van de vorige constructie

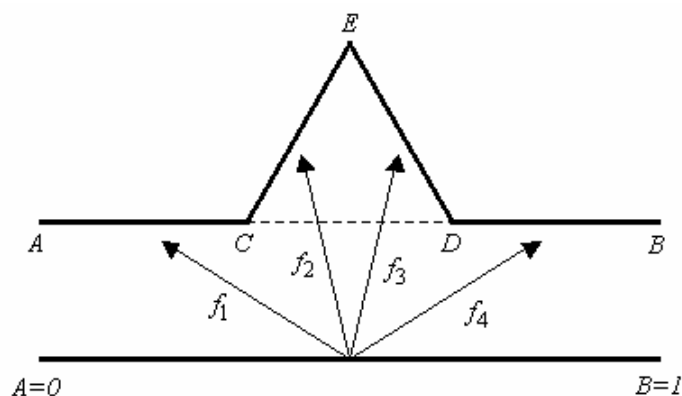
Op ieder lijnstuk van de zo ontstane nieuwe figuur passen we weer deze constructie toe, .....

De limietfiguur die ontstaat uit dit iteratieproces noemt men de Koch-kromme, die men een klassieker mag noemen in de wereld van fractalen.



We gebruiken de ideeën uit het voorbeeld van 5.1.4 om de punten (complexe getallen) te berekenen die in iedere stap verbonden moeten worden met lijnstukken.

Om de Koch-kromme te construeren maken we gebruik van vier complexe functies van de eerste graad. We bepalen de functies  $f_1, f_2, f_3, f_4$  zodat  $f_1([AB]) = [AC]$ ,  $f_2([AB]) = [AC]$ ,  $f_3([AB]) = [AC]$  en  $f_4([AB]) = [AC]$  (zie onderstaande figuur).



De functie  $f_1$  is een homothetie met schaalfactor  $1/3$  en als centrum de oorsprong.

M.a.w.  $f_1(z) = \frac{1}{3}z$ . Hieruit volgt vanzelfsprekend dat  $C = f_1(B) = f_1(1) = \frac{1}{3}$ .

De functie  $f_2$  is de samenstelling van een homothetie met als centrum de oorsprong en factor  $1/3$ , een rotatie rond de oorsprong over een hoek van  $60^\circ$  (in tegenwijzerszin) en een translatie over een afstand  $1/3$ . Het functievoorschrift van  $f_2$  wordt gegeven door:

$$f_2(z) = \frac{1}{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot z + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot z + \frac{1}{3} = (\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i) \cdot z + \frac{1}{3}.$$

Hieruit volgt:  $E = f_2(B) = (\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ .

De functie  $f_3$  is de samenstelling van een homothetie met als centrum de oorsprong en factor  $1/3$ , een rotatie rond de oorsprong over een hoek van  $-60^\circ$  en een translatie over een afstand  $d$ . Het functievoorschrift van  $f_3$  is:

$$f_3(z) = \frac{1}{3}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) \cdot z + d = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot z + d = (\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i) \cdot z + d.$$

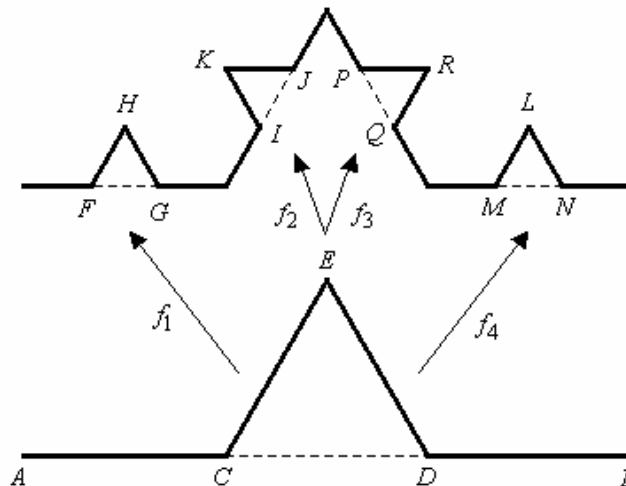
We bepalen  $d$ :  $f_3(A) = E \Leftrightarrow f_3(0) = d = E = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ .

Het functievoorschrift wordt:  $f_3(z) = (\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i) \cdot z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ .

De functie  $f_4$  is de samenstelling van een homothetie met schaalfactor  $1/3$  en als centrum de oorsprong en een verplaatsing over een afstand  $2/3$ :  $f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$ .

Vanzelfsprekend geldt  $f_4(A) = D = f_4(0) = \frac{2}{3}$ .

Om de tweede stap te tekenen berekenen we de beelden van de punten  $C$ ,  $D$ ,  $E$  voor de functies  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .



- $\underline{f_1(z) = \frac{1}{3}z}$

$$F = f_1(C) = f_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$G = f_1(D) = f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$H = f_1(E) = f_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$$

- $\underline{f_2(z) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot z + \frac{1}{3}}$

$$I = f_2(C) = f_2\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$$

$$J = f_2(D) = f_2\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9}i$$

$$K = f_2(E) = f_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}i$$

- $\underline{f_3(z) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i}$

$$P = f_3(C) = f_3\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{5}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9}i$$

$$Q = f_3(D) = f_3\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{11}{18} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$$

$$R = f_3(E) = f_3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}i$$

- $\underline{f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}}$

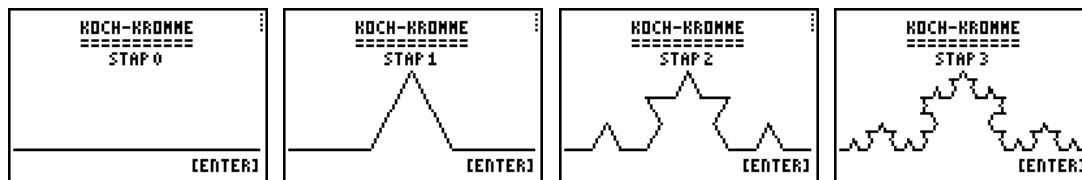
$$M = f_4(C) = f_4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$$

$$N = f_4(D) = f_4\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

$$L = f_4(E) = f_4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$$

Het verder zetten van dit iteratieproces met de functies  $f_1, f_2, f_3, f_4$  convergeert naar de Koch-Kromme.

Het volgende programma – KOCH.8xp - toont, zonder gebruik te maken van recursiemethoden, hoe het mogelijk is om enkele stappen in de constructie van de Koch-kromme te tekenen met de TI-83/84 Plus gebruikmakend van de punten *A*, *B*, *C*, *D*.



```

Cl rDraw: AxesOff
OüXmi n: 1üXmax: 1üXscl : ú. 1üYmi n: . 5üYmax: 1üYscl : 1üXres
Text(2, 26, "KOCH-KROMME"): Text(8, 26, "====="): Text(14, 37, "STAP 0")
Li ne(0, 0, 1, 0): Text(55, 69, "[ENTER]")
Pause: Cl rDraw
Text(2, 26, "KOCH-KROMME"): Text(8, 26, "====="): Text(14, 37, "STAP 1")
Li ne(0, 0, 1/3, 0): Li ne(1/3, 0, 1/2, 0(3)/6): Li ne(1/2, 0(3)/6, 2/3, 0): Li ne(2/3, 0, 1, 0)
Text(55, 69, "[ENTER]")
Pause: Text(14, 37, "WACHT! ")
Li stämatr({0, 0}, {1/3, 0}, {1/2, 0(3)/6}, {2/3, 0}, [A]): [A]öü[A]
randM(4, 2)ü[B]
For(I, 1, 4)
1/3*[A](I, 1)ü[B](I, 1): 1/3*[A](I, 2)ü[B](I, 2)
End
randM(4, 2)ü[C]
For(I, 1, 4)
1/6*[A](I, 1)-0(3)/6[A](I, 2)+1/3ü[C](I, 1): 1/6*[A](I, 2)+0(3)/6[A](I, 1)ü[C](I, 2)
End
randM(4, 2)ü[D]
For(I, 1, 4)
1/6*[A](I, 1)+0(3)/6[A](I, 2)+1/2ü[D](I, 1): 1/6*[A](I, 2)-0(3)/6[A](I, 1)+0(3)/6ü[D](I, 2)
End
randM(4, 2)ü[E]
For(I, 1, 4)
1/3*[A](I, 1)+2/3ü[E](I, 1): 1/3*[A](I, 2)ü[E](I, 2)
End
augment(augment(augment([B]ö, [C]ö), [D]ö), [E]ö)ü[A]: [A]öü[A]
Cl rDraw: Text(2, 26, "KOCH-KROMME"): Text(8, 26, "====="): Text(14, 37, "STAP 2")
For(K, 1, 15)
Li ne([A](K, 1), [A](K, 2), [A](K+1, 1), [A](K+1, 2))
End
Li ne([A](16, 1), [A](16, 2), 1, 0): Text(55, 69, "[ENTER]")
Pause : Text(14, 37, "WACHT! ")
randM(16, 2)ü[B]
For(I, 1, 16)
1/3*[A](I, 1)ü[B](I, 1): 1/3*[A](I, 2)ü[B](I, 2)
End
randM(16, 2)ü[C]
For(I, 1, 16)
1/6*[A](I, 1)-0(3)/6[A](I, 2)+1/3ü[C](I, 1): 1/6*[A](I, 2)+0(3)/6[A](I, 1)ü[C](I, 2)
End
randM(16, 2)ü[D]
For(I, 1, 16)
1/6*[A](I, 1)+0(3)/6[A](I, 2)+1/2ü[D](I, 1): 1/6*[A](I, 2)-0(3)/6[A](I, 1)+0(3)/6ü[D](I, 2)
End
randM(16, 2)ü[E]
For(I, 1, 16)
1/3*[A](I, 1)+2/3ü[E](I, 1): 1/3*[A](I, 2)ü[E](I, 2)
End
augment(augment(augment([B]ö, [C]ö), [D]ö), [E]ö)ü[A]: [A]öü[A]
Cl rDraw: Text(2, 26, "KOCH-KROMME"): Text(8, 26, "====="): Text(14, 37, "STAP 3")
For(K, 1, 63)
Li ne([A](K, 1), [A](K, 2), [A](K+1, 1), [A](K+1, 2))
End
Li ne([A](64, 1), [A](64, 2), 1, 0): Text(55, 69, "[ENTER]")
Pause
Cl rDraw: Zstandard: Axes0n: Di sp : Stop

```

## 5.3 Functies van de tweede graad

### 5.3.1 Kwadraat van een complex getal

Beschouw de complexe functie  $f(z) = z^2$ .

Voor iedere  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  geldt:

$$f(z) = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^2 = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha).$$

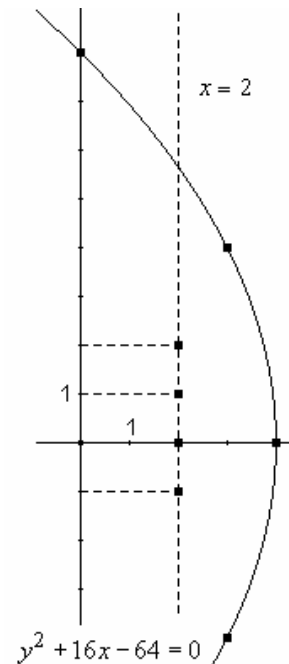
Het kwadrateren van een complex getal komt met andere woorden neer op het kwadrateren van de modulus en het verdubbelen van het argument.

- Neem als domein de rechte evenwijdig met de imaginaire as en door  $z = 2$ .

We bekijken de beelden van enkele punten:

$z$	$r$	$\text{Arg } z$	$r^2$	$2 \text{ Arg } z$
$2 - 2i$	$\sqrt{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	8	$-\frac{\pi}{2}$
$2 - i$	$\sqrt{5}$	-.463	5	-.927
2	2	0	4	0
$2 + i$	$\sqrt{5}$	.463	5	.927
$2 + 2i$	$\sqrt{8}$	$\frac{\pi}{4}$	8	$\frac{\pi}{2}$

De complexe getallen met als poolcoördinaten de koppels  $(r^2, 2\text{Arg } z)$ , waarbij  $(r, z)$  telkens behoort tot de rechte  $x = 2$ , liggen op een parabool met als vergelijking  $y^2 + 16x - 64 = 0$ .

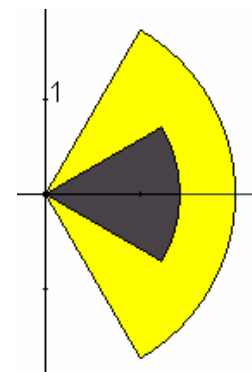


- Beschouw als domein de complexe getallen die gelegen zijn in de cirkelsector met straal  $\sqrt{2}$  en argumenten tussen  $-\frac{\pi}{6}$  en  $\frac{\pi}{6}$ .

Het beeld van deze cirkelsector zijn de complexe getallen gelegen in een cirkelsector met straal 2 en

argumenten tussen  $-\frac{\pi}{3}$  en  $\frac{\pi}{3}$ .

De verhouding van de oppervlakte van het beeld t.o.v. de oppervlakte van het domein is het dubbel van het kwadraat van de straal van het domein.



### 5.3.2 Julia-verzamelingen

We bekijken de complexe functie  $f(z) = z^2$  op een iets wat meer dynamische manier. We gebruiken  $f$  in een iteratieproces op de volgende manier.

Voor ieder complex getal  $z$  geeft iteratie van de functie  $f$  de volgende rij complexe getallen:

$$z_0 = z, z_1 = f(z_0) = z^2, z_2 = f(z_1) = z^4, z_3 = f(z_2) = z^8, \dots, z_n = f(z_{n-1}) = z^{2^n}, \dots$$

Deze rij noemen we de baan van  $z$ . De volgende tabel beschrijft de iteratie in drie verschillende punten.

	$r$	$\alpha$	$r$	$\alpha$	$r$	$\alpha$
$z$	0.4	10	1	125°	2	35°
$z^2$	0.16	20	1	250°	4	70°
$z^4$	0.0256	40	1	140°	16	140°
$z^8$	$6.5536 \cdot 10^{-4}$	80	1	280°	256	280°
$z^{16}$	$4.29 \cdot 10^{-7}$	160	1	200°	65536	200°
$z^{32}$	$1.8404 \cdot 10^{-13}$	320	1	40°	4294967296	40°

Deze tabel illustreert mooi het dynamische gedrag van de functie  $f(z) = z^2$ .

- Een startwaarde binnen de eenheidscirkel ( $|z| < 1$ ) heeft een baan die convergeert naar de oorsprong.
- Een startwaarde op de eenheidscirkel ( $|z| = 1$ ) genereert een baan die steeds op de eenheidscirkel blijft.
- En indien we de iteratie starten buiten de eenheidscirkel zal de baan iedere cirkel rond de oorsprong verlaten. Men noemt de baan dan onbegrensd.

De functie  $f(z) = z^2$  verdeelt zo het complexe vlak in twee gebieden.

Een eerste gebied bestaat uit punten waarvan de baan onbegrensd is en een tweede gebied uit punten waarvan de baan begrensd is. De grens tussen deze twee gebieden, de eenheidscirkel, noemt men de Julia-verzameling van de functie  $f(z) = z^2$ .

In 1918 publiceerde Gaston Julia (1893-1978) een meesterwerk over iteraties van rationale functies. Hij kan beschouwd worden als één der voorvaders van de tak van de wiskunde die men de dag van vandaag Dynamische Systemen noemt.

Een onderdeel van zijn werk bestond uit de studie van het dynamische gedrag van de complexe functies  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^2 + c$  met  $c \in \mathbb{C}$ .

We bekeken al het geval  $c = 0$ . In het algemeen geeft iteratie van de functie  $f(z) = z^2 + c$  met  $c \in \mathbb{C}$  voor ieder complex getal  $c$  de baan:

$$z \mapsto z^2 + c \mapsto (z^2 + c)^2 + c \mapsto ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto (((z^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$$

Deze baan voldoet steeds aan één van de twee volgende eigenschappen.

- (i) De baan is onbegrensd, d.w.z. de elementen van de baan verlaten iedere cirkel rond de oorsprong.
- (ii) De baan is begrensd, d.w.z. dat de elementen van de baan steeds in een cirkel met een bepaalde straal rond de oorsprong blijven.

De verzamelingen van de complexe getallen die aan één van de bovenstaande eigenschappen voldoen zijn niet leeg. Dit volgt respectievelijk uit het volgende:

- (i) Voor  $|z| > \max\{|c|, 2\}$  bestaat een  $\varepsilon > 0$  zodat  $|z| = 2 + \varepsilon$ .

Dan geldt  $|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$  waaruit volgt:

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = (|z| - 1)|z| = (1 + \varepsilon)|z|.$$

De modulus van de elementen van de baan zal in dit geval toenemen met minstens een factor  $1 + \varepsilon$  zodat de baan duidelijk onbegrensd is.

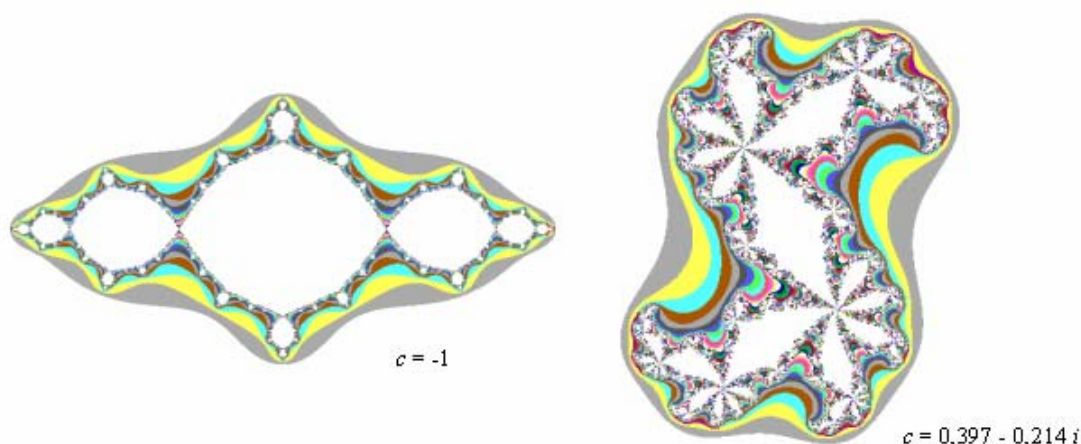
- (ii) De vergelijking  $z = z^2 + c$  heeft oplossingen in  $\mathbb{C}$ . Voor de oplossingen van deze vergelijking geldt  $f(z) = z$ . Voor deze complexe getallen bestaat de baan uit één punt. Een complexe getal  $z$  waarvoor geldt dat  $f(z) = z$  noemt men een fixpunt.

De verzameling van complexe getallen die voldoen aan de tweede eigenschap noemt men de uitgebreide Julia-verzameling van de functie  $f(z) = z^2 + c$ .

Wiskundig definieert men de Julia-verzameling van de functie  $f(z) = z^2 + c$  als de rand van de uitgebreide Julia-verzameling.

Intuïtief betekent dit dat de Julia-verzameling de grens aangeeft tussen de punten waarvan de baan begrensd blijft en de punten waarvan de baan naar oneindig gaat. In wat volgt noemen we de uitgebreide Julia-verzameling gewoon de Julia-verzameling.

Hieronder vind je een afbeelding van twee Julia-verzamelingen horende bij de functie  $f(z) = z^2 + c$  met  $c \in \mathbb{C}$ .



De bovenstaande figuren zijn gemaakt met het programma FRACTINT dat gratis kan gedownload worden via de *Spanky Fractal Database* ([spanky.triumf.ca](http://spanky.triumf.ca)).



In zijn meesterwerk bewees Julia dat de Julia-verzamelingen behorende bij de functies  $f(z) = z^2 + c$  ofwel samenhangend zijn ofwel totaal on samenhangend. Julia bewees de volgende dichotomie van de complexe getallen:

Voor de Julia-verzameling,  $J_c$ , behorende bij de functie  $f(z) = z^2 + c$  geldt:

$J_c$  is samenhangend indien de baan van nul begrensd is en

$J_c$  is on samenhangend indien de baan van nul on begrensd is.

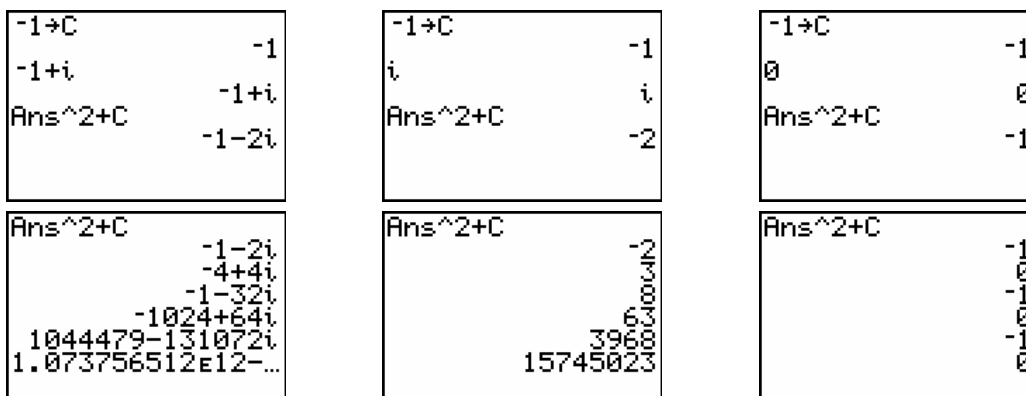
De baan van nul voor de functie  $f(z) = z^2 + c$  wordt gegeven door:

$$0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$$

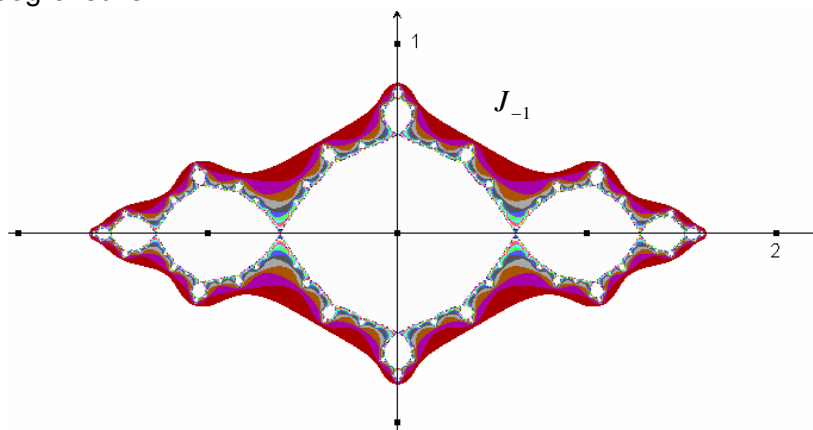
Ruwweg kunnen we zeggen dat een samenhangende verzameling uit één stuk bestaat; zoals bijvoorbeeld de eenheidsschijf, behorende bij  $f(z) = z^2$ , of de twee vorige figuren. Zonder verder uit te weiden bestaat een totaal on samenhangende verzameling uit oneindig veel stukken. Zo'n verzameling kan gevisualiseerd worden door een wolk van punten waarbij er geen enkele twee punten mekaar raken en waarbij er in de omgeving van ieder punt er zich oneindig veel punten van dat punt verwijderen. In de literatuur spreekt men van een Cantor-verzameling.

Uit deze dichotomie volgt dat er geen Julia-verzameling  $J_c$  bestaat die bijvoorbeeld samengesteld is uit vijf disjuncte stukken.

Met de TI-83/84 Plus kan de begrensheid van banen bestudeerd worden met de ANS-toets. Stel bv.  $c = -1$ . We kijken even de banen van  $-1+i$  en  $i$ .



De theorie van Julia zegt, zie bovenstaande berekeningen, dat de complexe getallen  $-1+i$  en  $i$  niet behoren tot  $J_{-1}$ . Wel geldt dat  $J_{-1}$  samenhangend is daar de baan van nul begrensd is.



## 5.4 De Mandelbrot-verzameling

Eén van de mooiste en meest fascinerende figuren uit de wiskunde is de Mandelbrot-verzameling, die ontdekt werd door Benoit Mandelbrot rond 1980.

Velen, ook personen die helemaal niet thuis zijn in het vakgebied wiskunde, hebben al kennis gemaakt met deze schoonheid. Maar slechts enkelen van hen kennen de wiskundige fundamenteën van de Mandelbrot-verzameling.

Het werk van Julia geraakte in de vergeethek tot Mandelbrot in 1977 interesse toonde in dit werk. D.m.v. van computereperimenten toonde Mandelbrot dat het werk van Julia een bron is van heelwat prachtige fractalen.

De Mandelbrot-verzameling is ook gebaseerd op het dynamisch gedrag van de functies  $f(z) = z^2 + c$  met  $c \in \mathbb{C}$ .

De idee van Mandelbrot was de dichotomie van Julia grafisch voor te stellen.

Hij berekende voor iedere  $c \in \mathbb{C}$  de baan van 0 onder iteratie van de functie  $f(z) = z^2 + c$ :  $0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$

Voor het bestuderen van het al dan niet begrensd zijn van deze rij is het voldoende de rij  $c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$  te bestuderen.

Voor  $c = i$  is de baan van 0 gegeven door:  $0 \mapsto i \mapsto -1 + i \mapsto -i \mapsto -1 + i \mapsto -i \mapsto \dots$

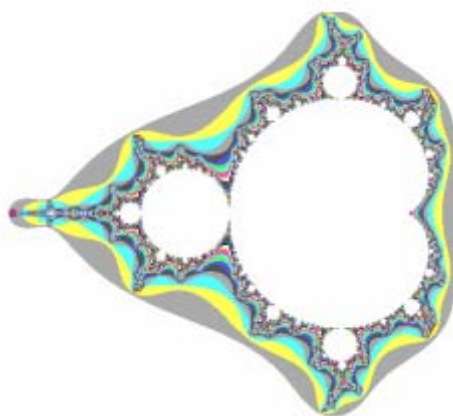
We zien dat de baan in dit geval convergeert naar een 2-cyclus.

Voor  $c = 2i$  wordt de baan van 0:  $0 \mapsto 2i \mapsto -4 + 2i \mapsto 12 - 14i \mapsto -52 - 344i \mapsto \dots$   
m.a.w. de baan van 0 zal zich steeds verder en verder verwijderen van de oorsprong.

Weer kan gebruik gemaakt worden van de grafische rekenmachine om na te gaan of een complex getal  $c$  behoort tot de Mandelbrotverzameling. Duidelijk geldt dat  $i$  behoort tot de Mandelbrot-verzameling en  $2i$  niet.

De Mandelbrot-verzameling bestaat uit deze  $c$ -waarden waarvoor de baan van 0 begrensd blijft, m.a.w. deze  $c$ -waarden waarvoor de bijhorende Julia-verzameling samenhangend is.

Door dit procédé te vertalen naar een computeralgoritme bekwam B. Mandelbrot de onderstaande witte figuur.



De idee achter dit algoritme is het volgende.

Beschouw het computerscherm als een gedeelte van het complexe vlak. Voor ieder pixel  $c \in \mathbb{C}$  wordt de computer gevraagd na te gaan of de baan van nul naar oneindig gaat of niet. In het tweede geval wordt het pixel wit gekleurd, in het andere geval wordt een andere kleur gebruikt.

Hoe kan de computer controleren of een baan naar oneindig gaat of niet ?

Men kan nagaan dat de complexe getallen die tot de Mandelbrot-verzameling behoren op een afstand kleiner of gelijk aan 2 van de oorsprong liggen.

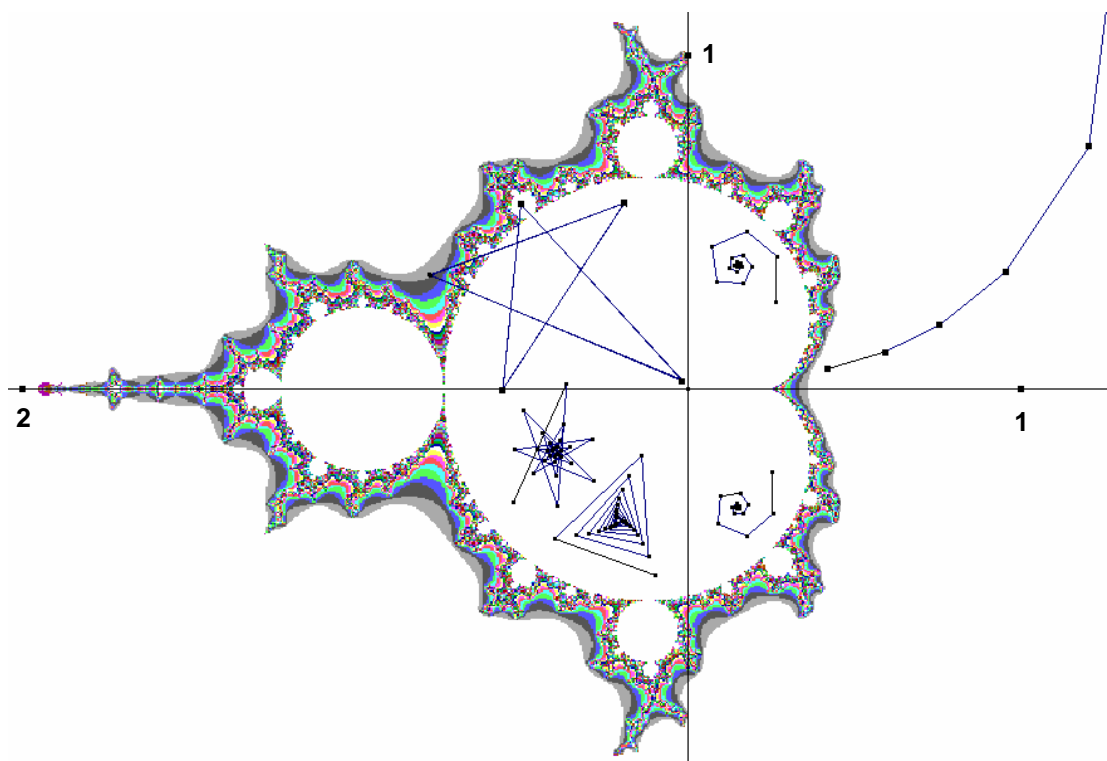
Er geldt dat indien de baan van 0 onder iteratie d.m.v. de functie  $f(z) = z^2 + c$  ( $c \in \mathbb{C}$  met  $|c| \leq 2$ ) ooit de cirkel met middelpunt de oorsprong en straal 2 overschrijdt, de baan van nul naar oneindig gaat.

We laten de computer bijvoorbeeld de eerste 1000 iteraties berekenen en telkens controleren of de baan zich niet verder dan een afstand 2 van de oorsprong heeft verwijderd.

Blijven we 1000 iteraties lang binnen de cirkel met straal 2 rond de oorsprong dan kleuren we het pixel wit en in het andere geval kiezen we een kleur afhankelijk van het aantal stappen dat nodig is om buiten de gekozen cirkel te treden.

Merk op dat de afbeelding slechts een benadering is van de Mandelbrot-verzameling daar de computer slechts een eindig aantal iteraties kan uitvoeren.

De onderstaande figuur toont de ligging van de mandelbrotverzameling samen met de banen van 0 behorende bij enkele complexe getallen  $c$ .



De Mandelbrot-verzameling is een voedingsbodem voor tal van artistieke computer graphics. Overtuig jezelf door de Mandelbrot-verzameling te exploiteren, bijvoorbeeld door middel van de software FRACTINT ([spanky.triumf.ca](http://spanky.triumf.ca)). Hieronder vind je enkele vergrotingen van de rand van de Mandelbrot-verzameling.

