

Dynamische processen

Zelfstudieopdracht 4

Een vallend voorwerp

Een voorwerp met massa 100 kg valt uit een vliegtuig en heeft een beginsnelheid van $0 \frac{m}{s}$ en een valversnelling van ongeveer $10 \frac{m}{s^2}$.

Hieruit volgt dat $F_z = 100 \cdot 10 [kg \frac{m}{s^2} = N] = 1000 [N]$.

De wrijvingskracht is recht evenredig met de snelheid op het ogenblik t en de evenredigheidsfactor kan experimenteel bepaald worden.

We nemen gemakshalve 15 als factor zodat $F_w = 15v(t)$.

De resulterende kracht is dan $F = 1000 - 15v(t)$.

Het voorwerp valt tengevolge van deze resulterende kracht en volgens de derde wet van Newton: $F = ma = mv'(t)$.

Dit geeft in ons voorbeeld: $100 v'(t) = 1000 - 15v(t)$ of de differentiaalvergelijking: $v'(t) = 10 - 0,15 \cdot v(t)$.

Om deze differentiaalvergelijking numeriek op te lossen herleiden we ze tot een differentievergelijking.

Voor Δt voldoende klein geldt: $v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$.

a. 1^e benadering:

Voor $\Delta t = 1 [s]$ geeft dit $v'(t) = 10 - 0,15v(t) \approx \frac{v(t+1) - v(t)}{(t+1) - t}$.

Hieruit volgt de differentievergelijking $\Delta v(t) = v(t+1) - v(t) \approx 10 - 0,15v(t)$ of de recursieve vergelijking $v(t+1) \approx v(t) + 10 - 0,15 \cdot v(t) = 0,85 \cdot v(t) + 10$.

De oplossing van deze recursieve vergelijking met beginvoorwaarde $v_0 = 0$ is de rij:

$$\begin{aligned} v(0+1) &= v(1) \approx v(0) + 10 - 0,15 \cdot v(0) = 10 \\ v(1+1) &= v(2) \approx v(1) + 10 - 0,15 \cdot v(1) = 18,5 \\ v(2+1) &= v(3) \approx v(2) + 10 - 0,15 \cdot v(2) = 25,725 \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &\rightarrow 10 \rightarrow 18,5 \rightarrow 25,725 \rightarrow \dots \\ &\quad \text{na 1s} \quad \text{na 2s} \quad \text{na 3s} \end{aligned}$$

b. 2^e benadering

Voor $\Delta t = 0,1$ [s] is $v'(t) = 10 - 0,15v(t) \approx \frac{v(t+0,1) - v(t)}{0,1}$.

Bepaal de differentievergelijking, de bijhorende recursieve vergelijking en de bijhorende rij als $v_0 = 0$.

c. 3^e benadering

Bereken de rij voor $\Delta t = 0,01$ [s] en $v_0 = 0$.

d. Stel de 3 voorgaande rijen voor in een tijdgrafiek. Neem respectievelijk 50, 500 en 5000 stappen.

De exacte oplossing $v(3)$ van de differentiaalvergelijking $v'(t) = 10 - 0,15v(t)$ bij $v_0 = 0$ is gelijk aan 24,158.... (zie zelfstudieopdracht 6).

Vergelijk de snelheden na 3 s van de drie benaderingen met de exacte oplossing (3s zijn 30 stappen van 0,1s en 300 stappen van 0,01s).

Wat stel je vast?

e. Bepaal de evenwichtswaarde van de drie recursieve vergelijkingen en stel het expliciet voorschrift op van de drie rijen.