

Rijen



Machteld Verhenne

Inhoudstafel

1	Termen en voorschrift van een rij	2
1.1	Expliciet voorschrift van een rij	2
1.2	Recursief voorschrift van rij	3
2	Rekenkundige rijen	6
2.1	Definitie en voorschrift	6
2.2	Rekenkundig gemiddelde	7
2.3	Som van de eerste termen van een rekenkundige rij	9
2.4	Het sommatieteken	10
3	Meetekundige rijen	13
3.1	Definitie en voorschrift	13
3.2	Meetekundige rij en meetkundig gemiddelde	14
3.3	Som van de eerste termen van een meetkundige rij	18
4	Herhalingsoefeningen	21

1 Termen en voorschrift van een rij

Voorbeelden

1. Zoek het patroon in de onderstaande getallenrijen. Noteer de volgende twee getallen van deze rij en het twintigste getal.

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

(b) $13, 8, 3, -2, \dots$

(c) $2, -6, 18, -54, 162, \dots$

(d) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

(e) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$

Een aantal getallen die in een bepaalde volgorde voorkomen noemen we een rij van getallen.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ is de rij van de natuurlijke getallen

$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ is de rij van de delers van 24

$1, 4, 9, 16, 25, \dots$ is de rij van de kwadraatsgetallen

De elementen van een rij noemen we de **termen** van een rij.

We noteren de termen met een letter en een index die positie in de rij weergeeft:

u_n is de eerste term, u_2 is de tweede term $\dots$ u_n is de n 'de term

1.1 Expliciet voorschrift van een rij

2. Bij de rij $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ hoort het voorschrift $u_n = n^2$
Bepaal het voorschrift voor de volgende rijen.

(a) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

(b) $2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \dots$

(c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Een rij kunnen we vaak definiëren door een voorschrift. Als we met dat voorschrift rechtstreeks u_n kunnen berekenen, dan spreken we van een **expliciet voorschrift**.

Voorbeelden:

$u_n = 2n - 1$

$1, 3, 5, 7, 9, \dots$ is de rij van de oneven getallen

$u_n = n^3$

$1, 8, 27, 64, \dots$ is de rij van de derde machten

$u_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ is de rij van de stambreken

Een expliciet voorschrift van een rij bestaat niet altijd.

Bijvoorbeeld voor de rij van de priemgetallen $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$ bestaat er geen voorschrift.

3. Bepaal de eerste drie termen van de rij waarvan het voorschrift gegeven is:

(a) $u_n = 3n + 1$

(b) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

(c) $u_n = 3^{2-n}$

(d) $u_n = 1 + (-1)^n$

4. Bepaal het expliciet voorschrift van de volgende rijen

(a) 0, 3, 6, 9, ...

(b) 8, 14, 20, 26, 32, ...

(c) 4, -8, 16, -32, 64, ...

(d) 2, 5, 10, 17, 26, ...

(e) -1, 1, -1, 1, -1, ...

(f) 5, -5, 5, -5, 5, ...

(g) 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ...

1.2 Recursief voorschrift van rij

5. Bepaal de eerste vier termen van een rij waarbij elke term u_n het dubbele is van de voorgaande term u_{n-1} .

Hoeveel dergelijke rijen zijn er mogelijk?

6. (a) Bepaal de eerste vier termen van een rij waarvoor geldt $u_n = u_{n-1} + 3$ en $u_1 = 5$

(b) Bepaal de eerste vier termen van een rij waarvoor geldt $u_n = (-3) \cdot u_{n-1}$ en $u_2 = 5$

Als het verband tussen u_n en u_{n-1} in een voorschrift gegeven is dan spreken we van een **recursief** voorschrift. De rij is bepaald als we ook één term (bijvoorbeeld de eerste term) kennen.

Voorbeelden:

$$\begin{array}{ll} u_n = u_{n-1} \cdot 5 \text{ en } u_1 = 4 & 4, 20, 80, 320, \dots \\ u_n = u_{n-1} + 5 \text{ en } u_3 = 4 & -6, -1, 4, 9, \dots \\ u_n = n \cdot u_{n-1} \text{ en } u_1 = 1 & 1, 2, 6, 24, 120, \dots \end{array}$$

Een recursief¹ voorschrift van een rij bestaat niet altijd.

Bijvoorbeeld:

Voor de rij waarbij u_n het n'de decimaal van π voorstelt kunnen we geen recursief voorstel vinden. $\pi = 3.141526535897932384626433832795 \dots$

7. Bepaal de eerste vijf termen als van de volgende rijen gegeven is:

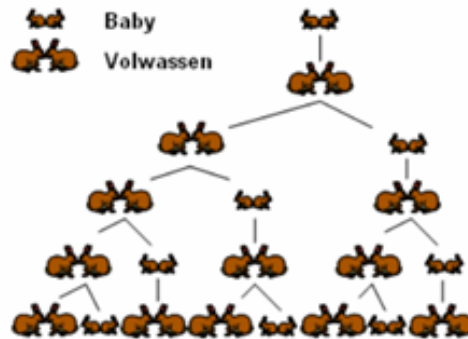
- (a) $u_n = u_{n-1} - 5$ en $u_1 = 3$
- (b) $u_n = (-3)u_{n-1}$ en $u_1 = 3$
- (c) $u_n = \frac{1}{u_{n-1}}$ en $u_2 = 3$
- (d) $u_n = \sqrt{u_{n-1}^2 + 1}$ en $u_1 = 3$
- (e) $u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$ en $u_1 = 3$ en $u_2 = 6$
- (f) $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ en $u_1 = 0$ en $u_2 = 1$

8. Bepaal, indien mogelijk, het recursief voorschrift van de volgende rijen

- (a) $-3, 3, -3, 3, \dots$
- (b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$
- (c) $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$
- (d) $3, 3, 6, 18, 72, \dots$

¹Recursief komt van recurrere (Latijn) dat we vertalen als teruglopen. Bij een recursief voorschrift ga terug naar de vorige term om een bepaalde term u_n te berekenen.

9. De **rij van Fibonacci** is genoemd naar Leonardo van Pisa, bijgenaamd Fibonacci, zoon van Bonaccio. Hij was een Italiaans wiskundige die in 1202 zijn boek Liber Abaci schreef. Hij beschrijft de groei van konijnenpopulaties. Fibonacci gebruikte hiervoor de volgende regels:

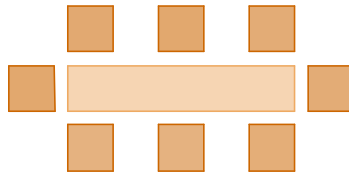


- In de eerste maand is er een paar pasgeboren konijnen.
 - Na één maand is dit paar volwassen.
 - Na twee maanden begint het konijnenpaar zich voor te planten.
 - Elke maand krijgt een volwassenen paar een nieuw paar nakomelingen (mannetje en vrouwtje).
 - De konijnen sterven niet.
- (a) Geef voor de eerste acht maanden het aantal konijnenparen dat er in het begin van de maand is.
- (b) Kan je een recursief voorschrift bedenken voor deze rij?

2 Rekenkundige rijen

2.1 Definitie en voorschrift

10. Aan een rechthoekige tafel kunnen acht personen plaatsnemen. Men zet enkele tafels met de kortste zijde tegen elkaar.



- (a) Hoeveel tafels moet men op die manier tegen elkaar schuiven voor een gezelschap van 140 personen?
- (b) Bepaal een expliciet en een recursief voorschrift van deze rij.

- Een **rekenkundige rij** is een rij waarbij elke term gelijk is aan de som van de vorige term met een vast getal. Dat vast getal bekomen we als we twee opeenvolgende termen van elkaar aftrekken. Daarom noemen we dit vast getal het **verschil v** van deze rij.

Bijvoorbeeld 2, 6, 10, 14, ... is een rekenkundige rij:
elke term is gelijk aan de vorige term plus 4.

- Recursief voorschrift

Voorbeeld

$$u_2 = 6$$

$$6 = 2 + 4$$

$$10 = 6 + 4$$

⋮

Het recursief voorschrift is dus $u_n = u_{n-1} + 4$ en $u_1 = 2$

$u_n = u_{n-1} + v$ en $u_1 = a$ is het **recursief** voorschrift van een rekenkundige rij

- Expliciet voorschrift

$$u_2 = u_1 + v$$

$$u_3 = u_2 + v = (u_1 + v) + v = u_1 + 2 \cdot v$$

$$u_4 = u_3 + v = (u_1 + 2 \cdot v) + v = u_1 + 3 \cdot v$$

⋮

$$u_n = u_{n-1} + v = u_1 + (n-2)v + v = u_1 + (n-1)v$$

$u_n = u_1 + (n-1) \cdot v$ is het **expliciet** voorschrift van een rekenkundige rij

2.2 Rekenkundig gemiddelde

In de rekenkundige rij $5, 8, 11, 14, 17, \dots$ is elke term (vanaf term 2) gelijk aan het gemiddelde van de twee termen die ernaast liggen: $8 = \frac{5+11}{2}$, $11 = \frac{8+14}{2}$, $14 = \frac{11+17}{2}$

In een rekenkundige rij is het verschil tussen twee opeenvolgende termen gelijk aan een vast getal v :

$$u_2 - u_1 = v = u_2 - u_1$$

$$\Updownarrow$$

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2$$

$$\Updownarrow$$

$$u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}$$

Analoog geldt: $u_3 = \frac{u_2 + u_4}{2}$, $u_4 = \frac{u_3 + u_5}{2}$, $u_5 = \frac{u_4 + u_6}{2}$

In een rekenkundige rij is elke term gelijk aan het gemiddelde van de twee naburige termen. Omdat er nog andere soorten gemiddelden bestaan, spreken we men hier van een rekenkundig gemiddelde. Daarvan is ook de naam rekenkundige rij afkomstig.

Omgekeerd vormen drie termen waarvan de middelste het gemiddelde is van de twee andere termen een rekenkundige rij.

Voorbeelden:

- $8, 14, 22, 28, 34, 40, \dots$
 - expliciet voorschrift: $u_n = 8 + (n - 1) \cdot 6 = 6n + 2$
 - recursief voorschrift: $u_n = u_{n-1} + 6$, $u_1 = 8$
- $8, 3, -2, -7, -12, \dots$
 - expliciet voorschrift: $u_n = 8 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 13$
 - recursief voorschrift: $u_n = u_{n-1} - 5$, $u_1 = 8$
- Bereken de twintigste term van een rekenkundige rij waarbij gegeven is:
 - 1) $u_1 = -5$ en $v = 2$
 $u_{20} = u_1 + 19 \cdot v = -5 + 38 = 33$
 - 2) $u_5 = 10$ en $v = 4$
 $u_{20} = u_5 + 15 \cdot v = 10 + 15 \cdot 4 = 70$

Algemeen geldt in een rekenkundige rij: $u_n = u_k + (n - k) \cdot v$

- De som van drie opeenvolgende getallen van een rekenkundige rij is 30. Het product is 910. Bepaal deze getallen.

Stel de getallen van deze rekenkundige rij voor door $x - v, x, x + v$

$$x - v + x + x + v = 30 \text{ Dus } x = 10$$

$$(10 - v) \cdot 10 \cdot (10 + v) = 910$$

$$10^2 - v^2 = 91$$

$$-v^2 = -9 \Rightarrow v = 3 \text{ of } v = -3$$

De drie opeenvolgende getallen zijn 7, 10 en 13.

- De winnaar van een zwemwedstrijd krijgt 500 EUR. De tweede krijgt 470 EUR en de volgende krijgen telkens 30 EUR minder. Hoeveel zwemmers krijgen een prijs?

De rij 500, 470, 440, 410, ... is een rekenkundige rij met verschil -30 .

Als n het aantal deelnemers is die in de prijzen valt, dan is u_{n+1} maximaal nul.

Stel $u_{n+1} = 0$.

$$\text{Dus } 0 = 500 + n \cdot (-30)$$

$$n = \frac{500}{30} \approx 16.666$$

Hier moet je afronden naar beneden want de laatste prijs moet nog een positief bedrag blijven.

Er zijn dus 16 zwemmers die een prijs behalen.

$$\text{Controle: } u_{16} = 500 + 16 \cdot (-30)$$

$$u_{16} = 500 - 480$$

$$u_{16} = 20$$

Een volgende prijs zou -10 EUR betekenen. Dat is niet realistisch.

Er zijn dus 16 winnaars.

11. Hoeveel termen bevatten de volgende rekenkundige rijen?

(a) $1, 4, 7, \dots, 244$

(b) $22, 5, -12, -29, \dots, -3854$

(c) $\pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \dots, -10\pi$

12. Behoort het getal a tot de gegeven rekenkundige rij? Zo ja, bepaal het volgnummer.

(a) $5, 8, 11, \dots$ en $a = 242$

(b) $6, -6, -18, \dots$ en $a = -240$

(c) $\frac{3}{4}, 2, \frac{13}{4}, \dots$ en $a = 32$

13. De hoeken van een driehoek vormen een rekenkundige rij. De kleinste hoek is 40° . Bepaal de hoeken van deze driehoek.

14. De hoeken van een vierhoek vormen een rekenkundige rij met verschil 8° . Bepaal de hoeken van deze vierhoek.
15. $a, b, c, d, \dots$ is een rekenkundige rij met verschil v .
Zijn de volgende rijen ook rekenkundig? Zo ja, bepaal het verschil.
Opmerking: k, m, x, p, n zijn natuurlijke getallen.
- (a) $ma, mb, mc, md, \dots$
 - (b) $a + k, b + k, c + k, d + k, \dots$
 - (c) $a + p, b + 2p, c + 3p, d + 4p, \dots$
 - (d) $ax, bx^2, cx^3, \dots$
 - (e) $a^2, b^2, c^2, d^2, \dots$
 - (f) $a + b, b + c, c + d, d + e, \dots$
 - (g) $a \cdot b, b \cdot c, c \cdot d, d \cdot e, \dots$
 - (h) $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}, \frac{d}{n}, \dots$

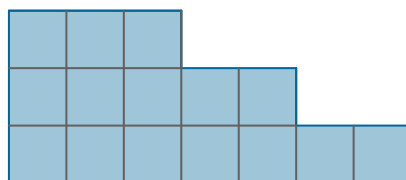
2.3 Som van de eerste termen van een rekenkundige rij

Voorbeeld

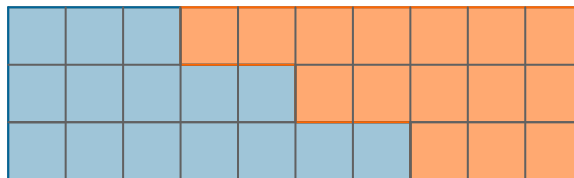
3, 5, 7 is een rekenkundige rij met verschil 2.

We zoeken de som van deze drie termen.

Deze som kunnen we visueel voorstellen door de oppervlakte van de grijze blokjes.



Om gemakkelijker de som te bepalen nemen we de oppervlakte nog eens, waarbij we de oppervlakte draaien over 180° . Beide figuren samen vormen een rechthoek.



Het dubbele van de som s_n is dus gelijk aan de oppervlakte van deze rechthoek: $2s_n = 3 \cdot (3+7)$

Dus de som is: $3 \cdot \frac{3+7}{2} = 15$

De som van de eerste n termen van een rekenkundige rij is gelijk aan: $s_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}$

Bewijs.

$$s_n = u_1 + \dots + u_n$$

$$s_n = u_n + \dots + u_1$$

$$+ \text{-----}$$

$$2s_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \dots + (u_n + u_1)$$

$$2s_n = (u_1 + u_n) + (u_1 + v + u_n - v) + (u_1 + 2v + u_n - 2v) + \dots + (u_n + u_1)$$

$\Updownarrow$ s_n bestaat uit n termen

$$2s_n = n(u_1 + u_n)$$

$$s_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

□

2.4 Het sommatieteken

Een som van een rij termen $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_8$ schrijven we verkort met het sommatieteken:

$$\sum_{i=1}^8 u_i$$

Een som van termen die op eenzelfde wijze opgebouwd zijn kunnen we ook met de somnotatie schrijven.

Bijvoorbeeld:

$$2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30$$

Dit is de som van acht termen van een rekenkundige rij met verschil 4.

De termen kunnen we zo schrijven dat het verschil herkenbaar is.

$$2 + (2 + 4) + (2 + 2 \cdot 4) + (2 + 3 \cdot 4) + \dots + (2 + 7 \cdot 4)$$

We kunnen dus elke term schrijven als: $u_i = 2 + (i - 1) \cdot 4$ Deze som is dus gelijk aan

$$\sum_{i=1}^8 [2 + (i - 1) \cdot 4] = \sum_{i=1}^8 (4i - 2)$$

Voorbeelden:

$$\bullet 5 + 10 + 15 + \dots + 60 = 12 \cdot \frac{5 + 60}{2} = \sum_{i=1}^{12} 5i = 390$$

$$\bullet \sum_{i=1}^{12} (5 + 3i) = 8 + 11 + 14 + \dots + 41 = 12 \cdot \frac{8 + 41}{2} = 6 \cdot 49 = 294$$

$$\bullet \sum_{j=0}^9 (1 + 5j) = 10 \cdot \frac{1 + 46}{2} = 10 \cdot 23.5 = 235$$

De natuurlijke getallen vormen ook een rekenkundige rij met verschil 1. De som van de eerste n natuurlijke getallen (verschillend van nul) is $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Voorbeeld

Stukken boomstammen met eenzelfde diameter en met dezelfde lengte worden als een driezijdig prisma gestapeld zodat elke boomstam rust tussen twee onderliggende boomstammen. Hoeveel stukken boomstammen liggen er als onderaan 15 boomstammen liggen?



Als de boomstam rust tussen twee onderliggende boomstammen, dan bevat de tweede laag 14 boomstammen, de derde laag 13 enzovoort. Deze vormen dus een rekenkundige rij met verschil 1. De eerste term is 15. De laatste term is 1. Er zijn dus 15 lagen. Het totaal aantal boomstammen is dus gelijk aan: $15 \cdot \frac{1+15}{2} = 15 \cdot 8 = 120$

16. De volgende rijen zijn rekenkundige rijen. Bereken het gevraagde.

- | | |
|--|---------------------|
| (a) $u_1 = 6$ en $v = 3$. | Bepaal s_{10} |
| (b) 90, 95, 100, 105, ... | Bepaal s_{22} |
| (c) $u_1 = 2$ en $s_8 = 128$. | Bepaal v |
| (d) $u_1 = 6$, $v = 3$ en $s_n = 195$. | Bepaal n en u_n |

17. Bereken de volgende sommen en noteer met het sommatieteken.

- (a) $4 + 8 + 12 + \dots + 400$
- (b) $\frac{5}{2} + \frac{13}{4} + 4 + \dots + 16$
- (c) $3 - 1 - 5 - 9 - 13 \dots - 157$

18. Bereken de gevraagde sommen:

$$(a) \sum_{i=1}^{12} (3 - 2i)$$

$$(b) \sum_{j=0}^{15} 6j$$

$$(c) \sum_{i=3}^{18} (4i + 6)$$

19. Bepaal de volgende sommen en noteer met het sommatieteken

(a) De oneven getallen tussen 0 en 100

(b) De natuurlijke getallen die uit twee cijfers bestaan

(c) De vijfvouden tussen 52 en 148

20. Bewijs dat de som van de eerste n oneven getallen gelijk is aan n^2 .

21. Stukken boomstammen met gelijke lengte worden gestapeld in de vorm van een driezijdig prisma. Kunnen we op die manier 160 boomstammen stapelen? Zo ja, hoeveel lagen boomstammen zijn er? Zo nee, hoeveel boomstammen blijven er over?

22. Hoe lang duurt het om een schuld van € 22000 af te betalen als je de eerste maand € 625 betaalt, de tweede maand € 675, de derde maand € 725 ...?

3 Meetkundige rijen

3.1 Definitie en voorschrift

23. Een blad papier van 1 mm dik kan je in twee vouwen. Dan bekom je een dikte van 2 mm.

- (a) Hoe dik wordt het gevouwen blad als je het vijf keer vouwt?
- (b) Hoe dik wordt het blad als je het vijftig keer dubbel vouwt?
- (c) Bepaal een recursief en een expliciet voorschrift voor deze rij.

- Een **meetkundige rij** is een rij waarbij elke term gelijk is aan de vorige term vermenigvuldigd met een vast getal. Dat vast getale bekomen we als we twee opeenvolgende termen door elkaar delen. Daarom noemen we dit vast getal het **quotiënt** q (of de **reden**) van deze rij.

Voorbeeld: 2, 6, 18, 54, ... is een meetkundige rij: elke term is gelijk aan de vorige term maal 3

- Recursief voorschrift:

Voorbeeld:

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$18 = 6 \cdot 3$$

$$54 = 18 \cdot 3$$

$\vdots$

Het recursief voorschrift is dus $u_n = u_{n-1} \cdot 3$ en $u_1 = 2$

$u_n = u_{n-1} \cdot q$ en $u_1 = a$ **is het recursief voorschrift van een meetkundige rij (reden q).**

- Expliciet voorschrift

$$u_2 = u_1 \cdot q$$

$$u_3 = u_2 \cdot q = (u_1 \cdot q) \cdot q = u_1 \cdot q^2$$

$$u_4 = u_3 \cdot q = (u_1 \cdot q^2) \cdot q = u_1 \cdot q^3$$

$\vdots$

$$u_n = u_{n-1} \cdot q = u_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ is het **expliciet voorschrift** van een meetkundige rij.

3.2 Meetkundige rij en meetkundig gemiddelde

- In een meetkundige rij is de verhouding van twee opeenvolgende termen gelijk aan de reden q :

$$\frac{u_2}{u_1} = q = \frac{u_3}{u_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$$

$$\Updownarrow \text{ kruisproduct}$$

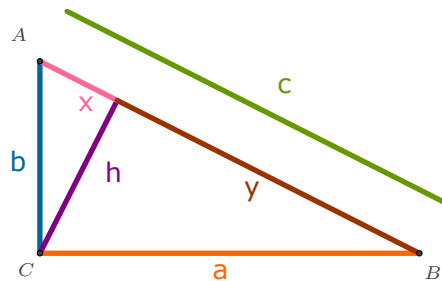
$$u_2^2 = u_1 \cdot u_3$$

- Analoog geldt: $u_3^2 = u_2 \cdot u_4$; $u_4^2 = u_3 \cdot u_5$

In een meetkundige rij is elke term gelijk aan de middelevenredige van de twee naburige termen. Omgekeerd vormen drie termen waarvan de middelste de middelevenredige is van de twee andere termen een meetkundige rij.

Een synoniem voor middelevenredige is meetkundige gemiddelde. De benaming meetkundige rij komt van het meetkundig gemiddelde die elke term t.o.v. zijn twee naburige termen is.

Verband met meetkundige eigenschappen: metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek



In een rechthoekige driehoek is de hoogte op de schuine zijde middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt.

$$h^2 = x \cdot y$$

x, h, y (en ook y, h, x) is een meetkundige rij

In een rechthoekige driehoek is elke rechthoekszijde middelevenredig tussen de schuine zijde en haar loodrechte projectie op de schuine zijde.

$$b^2 = c \cdot x \text{ en } a^2 = c \cdot y$$

x, b, c (en ook c, b, x) is een meetkundige rij.

Voorbeelden:

- Bepaal het voorschrift van de volgende rijen

a. $4, -12, 36, -108, \dots$

$$q = -3$$

$$u_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$$

b. 18, 12, 8, ...

$$q = \frac{2}{3}$$

$$u_n = 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

- Bereken de zesde term van de volgende meetkundige rijen

a. $u_1 = 6$ en $q = \frac{3}{2}$

$$u_6 = 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 6 \cdot \frac{3^5}{2^5} = \frac{729}{16}$$

b. $u_2 = 50$ en $q = \frac{2}{5}$

$$u_6 = u_2 \cdot q^4 = 50 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{50 \cdot 2^4}{5^4} = \frac{2^5}{5^2} = \frac{32}{25}$$

c. $u_8 = 6$ en $u_5 = 36$

$$u_8 = u_5 \cdot q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{u_8}{u_5}} = \sqrt[3]{\frac{36}{6}} = \sqrt[3]{6}$$

$$u_6 = u_5 \cdot q = 36 \cdot \sqrt[3]{6}$$

d. $u_1 = 5$ en $u_3 = 125$

$$u_3 = u_1 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{125}{5}$$

$q = 5$ of $q = -5$

$$u_6 = 5 \cdot 5^5 \text{ of } u_6 = 5 \cdot (-5)^5$$

$$u_6 = 15625 \text{ of } u_6 = 15625$$

Er zijn dus twee rijen die aan de voorwaarden voldoen.

24. Behoort het getal x tot de volgende meetkundige rij? Zo ja, bepaal het rangnummer.

(a) 6, 18, 54, ... en $x = 13132$

(b) 16, 40, 100, ... en $x = 3906,25$

(c) 5, -10, 20, ... en $x = 640$

25. Vormen de volgende getallen een meetkundige rij?

(a) p^2 , pq , q^2

(b) 1, $1 + x$, $1 + 2x + x^2$

(c) $a - b$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $a + b$

26. Bepaal drie opeenvolgende getallen van een meetkundige rij waarvan het product 64 en het grootste getal 48 is.

Bepaal deze getallen.

27. We laten een tennisbal vallen van een hoogte van 5,00 m. Na elke bots op de grond haalt de bal vier vijfden van vorige hoogte.

(a) Welke hoogte bereikt de bal na 8 botsten?

(b) Na hoeveel botsen heeft de bal nog een hoogte van 10 cm?

28. Welk getal moet men bij de getallen 4, 20, 68 optellen opdat de drie sommen een meetkundige rij zouden vormen?

29. Samengestelde intrest ²

Als je bij een bank een som geld op een spaarrekening plaatst, dan krijg je daar een vergoeding in de vorm van intrest op. Stel dat je van je meter een bedrag van 500 EUR krijgt en dat je dat op een spaarboekje plaatst dat 1% opbrengt. Na een jaar is dat bedrag 505 EUR geworden. Dat bedrag brengt opnieuw 1% op. Op die manier zal het aangevulde bedrag steeds meer opbrengen. Hoeveel staat er op je spaarboekje na acht jaren? Wanneer staat er op je spaarboekje een bedrag van 1000 EUR?

²Samengestelde intrest is intrest die je bekomt als je ook de rentevoet (%) laat inwerken op de vorige intresten

30. Papierformaten

Het DIN (Deutsches Institut für Normung) heeft de afmetingen van de door ons gebruikte papierformaten zoals $A_4, A_3, \dots$ vastgelegd door de volgende voorwaarden op te leggen. Het grootste formaat A_0 heeft een oppervlakte van 1 m^2 .

Als we een blad van het formaat A_n in twee plooien, dan hebben we twee bladen van formaat A_{n+1} . Om gemakkelijk van het ene naar het andere formaat te vergroten of te verkleinen bij het maken van een kopie moeten de formaten gelijkvormige rechthoeken zijn. We vertalen deze voorwaarden in de volgende verbanden tussen de lengte l_0 en breedte b_0 van A_0 en de lengte l_1 en breedte b_1 van A_1 .

$$l_0 \cdot b_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = \frac{1}{l_0} \quad (1)$$

$$b_1 = \frac{l_0}{2} \quad (2)$$

$$b_0 = l_1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = \frac{1}{l_0} \quad (3)$$

$$\frac{l_0}{b_0} = \frac{l_1}{b_1} \quad (4)$$

We substitueren (1), (2) en (3) in (4): $\frac{l_0}{\frac{1}{l_0}} = \frac{\frac{l_0}{2}}{\frac{1}{l_0}} \Rightarrow l_0^2 = \frac{2}{l_0^2} \Rightarrow l_0^4 = 2$
 $l_0 = \sqrt[4]{2} = 1,189 \text{ m} = 1189 \text{ mm}$

We bekomen dan de volgende afmetingen voor de verschillende A_n formaten:

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Lengte (mm)	1189	841	594	420	297	210
Breedte (mm)	841	594	420	297	210	148

De opeenvolgende lengte (en breedtes) vormen een meetkundige rij. Wat is de reden?

31. $a, b, c, d, \dots$ is een meetkundige rij met reden q . Zijn de volgende rijen ook rekenkundig? Zo ja, bepaal de het quotiënt van deze nieuwe rij.

Opmerking: k, m, x, p, n zijn natuurlijke getallen.

(a) $ma, mb, mc, md, \dots$

(b) $a + k, b + k, c + k, d + k, \dots$

(c) $a + p, b + 2p, c + 3p, d + 4p, \dots$

(d) $ax, bx^2, cx^3, \dots$

(e) $a^2, b^2, c^2, d^2, \dots$

(f) $a + b, b + c, c + d, d + e, \dots$

(g) $a \cdot b, b \cdot c, c \cdot d, d \cdot e, \dots$

(h) $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}, \frac{d}{n}, \dots$

3.3 Som van de eerste termen van een meetkundige rij

De som van de eerste n termen van een meetkundige rij met reden q is $s_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Bewijs. $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

↓ We vermenigvuldigen de som met het quotiënt en trekken daarvan de som af.

$$\begin{array}{rcl} s_n \cdot q & = & u_1 \cdot q + u_2 \cdot q + u_3 \cdot q + \dots + u_{n-1} \cdot q + u_n \cdot q \\ s_n & = & u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \end{array}$$

—

$$s_n \cdot q - s_n = u_n \cdot q - u_1$$

$$(q - 1) \cdot s_n = u_n \cdot q - u_1$$

$$s_n = \frac{u_n \cdot q - u_1}{q - 1}$$

$$\downarrow u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$$s_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

□

(1) en (2) zijn allebei formules voor de som van de eerste n termen. Afhankelijk van wat gegeven is zullen we (1) of (2) gebruiken.

- Bereken de som van de termen van de meetkundige rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{256}$

De laatste term is gegeven. Daarom kunnen we formule (1) voor de som gebruiken en hebben we n niet nodig.

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{u_n \cdot q - u_1}{q - 1} \\ &= \frac{\frac{1}{256} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= \frac{\frac{1}{512} - 1}{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{511}{512} \cdot 2 = \frac{511}{256} \end{aligned}$$

- Bepaal de volgende som $\sum_{i=2}^8 2 \cdot 3^i$

De reden is 3. Er zijn 7 termen. De eerste term is 18

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ s_n &= 18 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} \\ s_n &= 18 \cdot \frac{2187 - 1}{2} \\ s_n &= 19674 \end{aligned}$$

32. Bereken de gevraagde sommen van deze meetkundige rijen

(a) $1 + 6 + 36 + \dots + 6^{11}$

(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{128}$

(c) $\sum_{i=3}^{10} 3^i$

(d) $\sum_{n=1}^8 500 \cdot 1.01^n$

(e) $\sum_{i=1}^{12} \left(\frac{1}{2^i} + 2^i \right)$

33. Hier staan een aantal gegevens van een meetkundige rij. Bepaal het gevraagde.

(a) $u_1 = 7, q = 3$ Bereken s_8

(b) $u_1 = 2048, q = -\frac{1}{2}$ Bereken s_{14}

(c) $s_5 = 2728, q = \frac{1}{4}$ Bereken u_1 en u_5

(d) $u_1 = 4, u_n = 324, s_n = 484$ Bereken n en q

(e) $u_1 = 3, u_n = \frac{32}{81}, q = \frac{2}{3}$ Bereken n en s_n

(f) $s_{13} = 2047.75, q = 2$ Bereken u_{13}

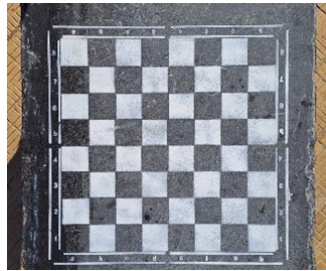
34. Ingrid krijgt een oproep om een goed doel te steunen. Als ze dezelfde dag nog een mail doorstuurt naar 7 mensen en deze mensen doen dat opnieuw, dan zal een organisatie per verzonden mail 0,5 EUR schenken. Hoeveel moet deze organisatie na een maand (30 dagen) ophoesten als iedereen die deze mail krijgt effectief naar zeven mensen doorstuurt?

35. De kaartclub telt 20 leden. De club wil meer leden aantrekken en ze spreken af dat elk lid op het einde van elk jaar twee nieuwe leden aanwerft. Hoeveel leden telt de vereniging op het einde van elk jaar?

36. De wereldbevolking is het totaal aantal levende mensen op aarde. Volgens de VN heeft dit aantal midden november 2022 de 8 miljard gehaald, met een jaarlijkse toename van 83 miljoen, zo'n 1,1%. Als deze stijging van 1,1% zich blijft doorzetten, wanneer is de wereldbevolking dan groter dan 10 miljard?

37. Een beroemde legende vertelt dat rond de vijfde eeuw na Christus het schaakspel in India door Sissa Ben Dahir werd uitgevonden en dat hij daarvoor van de koning Shirham een beloning beloofde die Sissa zelf mocht bepalen.

Hij vroeg om het aantal graankorrels dat je krijgt als je op het eerste vakje van het schaakbord één korreltje legt, op het tweede vakje twee, op het derde vier, op het vierde acht ... Elk vakje op het schaakbord krijgt op die manier het dubbel aantal graankorrels als het vorige vakje.



schaakbord op een zitbank Zeedijk Oostende ter hoogte van de Venetiaans galerijen

Koning Shirham onderschatte — zoals nagenoeg iedereen — intuïtief het aantal korrels en lachte Sissa uit omdat hij zo weinig vroeg. Toen hij iemand liet berekenen om hoeveel graankorrels het ging, duurde het meer dan een week voor die met een oplossing kwam.

Hoeveel ton graan vroeg de uitvinder als je mag rekenen dat 20 graankorrels ongeveer 1 gram wegen?

Ter info: de graanproductie in 2021 was 2,2 miljard ton.

4 Herhalingsoefeningen

38. Bepaal het expliciet of recursief voorschrift van de volgende rijen:

(a) $1, 3, 5, 7, \dots$

(b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \dots$

(c) $0, 3, 6, 9, \dots$

(d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

(e) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

39. Zijn de volgende rijen rekenkundig of meetkundig? Zo ja, bepaal het verschil of de reden. Bepaal het expliciet voorschrift indien mogelijk.

(a) $2, 4, 8, 16, \dots$

(b) $3, 3, 3, 3, \dots$

(c) $54, -18, 6, -2, \dots$

(d) $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \dots$

(e) $\frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{17}{18}, 1, \dots$

(f) $4, 6, 9, 13.5, \dots$

(g) $2, 6, 12, 20, \dots$

(h) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{2}, \dots$

40. Voor welke meetkundige rijen geldt de formule $s_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ niet?

41. Kamal wil iets aan zijn conditie doen en heeft zich voorgenomen om in de maand mei elke dag te gaan fietsen. Hij stelt het volgend trainingsschema op:

Hij start op 1 mei met een tocht van 9 km. Elke dag wil hij 2 km meer fietsen t.e.m. 31 mei.

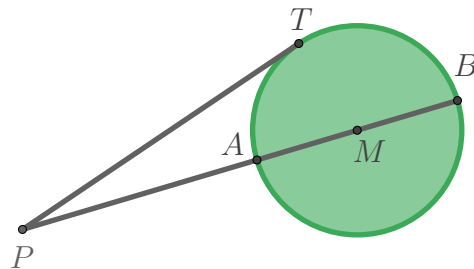
(a) Hoeveel km zal Kamal tijdens de maand mei gefietst hebben?

(b) Wanneer heeft hij meer dan 500 km gefietst?

42. Je gaat kamperen en bij het opslaan van je tent gebruik je haringen van 25 cm. bij de eerste hamerslag dringt de haring 6 cm in de grond. Bij elke volgende slag gaat de haring 25% minder diep in de grond dan bij de vorige slag.



- (a) Hoe diep zit de haring na 4 slagen?
- (b) Hoe dikwijls moet je slaan tot de haring maximaal 4 cm boven de grond uitsteekt?
43. Gegeven is de cirkel met middelpunt M . P is een punt buiten de cirkel. PT is raaklijn aan de cirkel met raakpunt T . de rechte PM snijdt de cirkel in A en B .
Toon aan dat $|PA|$, $|PT|$, $|PB|$ een meetkundige rij is.

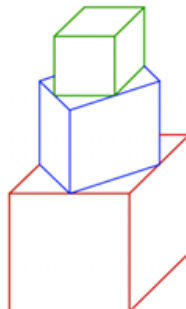


44. Vijf kleinkinderen (met een verschillende leeftijd) mogen van hun grootmoeder 175 EUR verdelen zodat elk kleinkind 10 EUR meer krijgt dan zijn onmiddellijk jongere broer, zus, neef of nicht. Hoeveel krijgt elk kind?
45. Voeg vijf getallen tussen 1 en 4096 in zodat je een rekenkundige rij van zeven termen bekomt. Bereken de som van de bekomen rij.
Opmerking: getallen tussenvoegen noemen we interpoleren.

46. Meriam wil zonnepanelen op haar plat dak plaatsen. Om een grotere opbrengst te hebben worden de panelen schuin geplaatst en gestut door zes palen die op gelijke afstand van elkaar staan. De hoogte van de langste paal is 1,2 m en de kortste paal is 0,3 m . Bereken hoeveel meter materiaal er nodig is voor deze zeven palen.



47. Een meetkundige rij van drie termen heeft als som 31 en als product -216. Bepaal deze drie termen.
48. Toon aan dat voor een meetkundige rij geldt $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n = (\sqrt{u_1 \cdot u_n})^n$
49. In een jeugdclub is het de gewoonte dat bij een samenkomst iedereen elkaar een vuistje geeft.
- (a) Hoeveel vuistjes worden er gegeven als de jeugdclub uit 75 leden bestaat?
- (b) Als er 1770 vuistjes dat gegeven worden, hoeveel leden telt de jeugdclub dan?
50. Kobe maakt een toren blokjes op de manier zoals hieronder afgebeeld. De hoekpunten van het ondervlak van een kubus vallen altijd samen met de middens van de ribben van het bovenzvlak van de kubus waar hij opstaat (zie figuur). De onderste kubus heeft een ribbe van 6 cm lang.
- (a) Bereken de ribbe van de tweede en derde kubus.
- (b) Als Kobe op deze manier blijft verder bouwen, hoe hoog zou een toren dan zijn met 10 blokken?



51. Op een feest willen ze de tafels zo schikken dat het vanaf boven af op een driehoek lijkt (zie tekening). Hoeveel rijen tafels moet men zetten voor een gezelschap van 350 personen?



52. Honderd koffers bevatten een gelijk aantal munten. Men neemt een zeker aantal munten uit de eerste koffer, het dubbele aantal uit de tweede, driemaal zoveel uit de derde ... tot honderd maal zoveel uit de honderdste. Er liggen in totaal 14950 munten in de koffers wanneer er nog één enkele munt in de laatste koffer overblijft. Hoeveel munten waren er oorspronkelijk in elke koffer?

a) 151 b) 201 c) 251 d) 301 e) 351

VWO 1994, eerste ronde

Referenties

- [1] *Examenvragen Nederland.*
- [2] *Presentatie rijen dag van de wiskunde UHasselt 2022, Katrijn Frederickx.*
- [3] Eric Dejonghe, *Cursus Eric Dejonghe 1988, gebaseerd op Wiskunde 6, P. Gevers – Wolters Leuven.*
- [4] R. Verhulst, *Exponent 4 /5, 1992, Standaard educatieve uitgeverij.*