3 Meetkundige voorstelling van complexe getallen

3.1 Complexe getallen als punten van een vlak

Complexe getallen zijn geïntroduceerd als punten van een vlak t.o.v. een orthonormaal assenstelsel. Een dergelijk assenstelsel is nodig omdat we met afstanden en hoeken gaan werken.

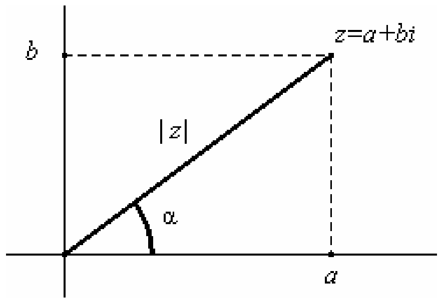
De reële getallen vormen de deelverzameling van punten van de vorm $a = (a,0) = a + 0i$ zodat elk reëel getal een punt voorstelt op de reële as van het complexe vlak of vlak van Gauss (1777-1855).

3.2 Goniometrische of polaire vorm van een complexe getal

Ieder complex getal $z = a + bi$ is volledig bepaald door het koppel reële getallen (a,b). Met ieder complex getal komt één punt van het vlak overeen en omgekeerd.

De ligging van ieder complex getal z, verschillende van nul, is ook ondubbelzinnig bepaald door:

- de afstand van z tot de oorsprong (Notatie: $|z|$) en
- de hoek α tussen de halfrechte oz en het positieve been van de reële as.



$|z|$ noemen we de modulus van het complex getal z.

Volgens de stelling van Pythagoras geldt: $\left|z\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

De hoek α met als beginbeen het positieve deel van de reële as en als eindbeen oz bepaalt het argument van het complex getal z. Deze hoek α heeft oneindig veel waarden, nl. $\alpha + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. De waarden noemen we de argumenten van z en noteren we als volgt : $\arg z = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

De hoofdwaarde van z, $\operatorname{Arg} z$, is het argument waarvoor geldt : $0 \le \operatorname{Arg} z < \pi$.

Voor een argument α van z geldt $\begin{cases} a = |z|\cos\alpha \\ b = |z|\sin\alpha \end{cases}$ zodat $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$.

<u>Definitie</u>: Voor een complex getal $z \neq 0$ met modulus r en argument φ geldt dat

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) .$$

Deze schrijfwijze noemt met de goniometrische of polaire vorm van een complex getal. Het koppel (r,φ) noemt men de poolcoördinaten van het punt z.

<u>Voorbeeld</u>

Voor $z = -1 - i$ geldt $|z| = \sqrt{2}$ en $\tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Merk op dat z gelegen is in het derde kwadrant zodat de goniometrische vorm van z gelijk is aan: $z = -1 - i = \sqrt{2}.(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$.

3.3 De formule van Euler

Het getal e, genoemd naar Leonard Euler (1707-1783), definiëren we als het reële getal waarvoor geldt: $\ln e = 1$.

Er geldt dat e irrationaal is en $e = 2,7182818284590452......$

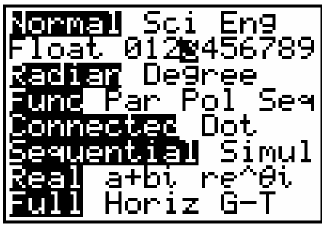
Bovendien geldt: $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Men kan bewijzen dat $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Vanzelfsprekend valt dit bewijs buiten de leerstof van het secundair onderwijs. Maar deze eigenschap kan beschouwd worden als een nieuwe, derde notatie van een complex getal.

Voor $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ geldt $z = re^{i\varphi}$.

De manier van noteren noemen we de formule van Euler.

3.4 Complexe getallen en de TI-83/84 Plus

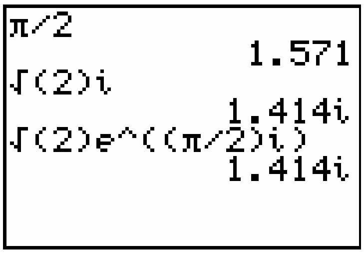


De TI-83/84 Plus heeft voor complexe getallen twee modi:

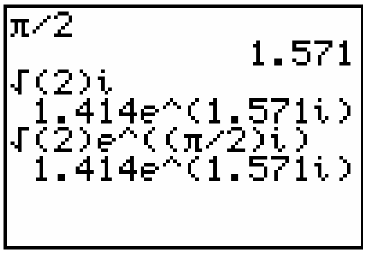
- `a+bi` → cartesische coördinaten
- `re^θi` → poolcoördinaten

Een complex getal wordt steeds bewaard in de cartesische mode maar kan altijd in de polaire vorm ingevoerd worden. Voor de twee onderstaande voorbeelden stellen we de drijvende komma-mode (`FLOAT`) in op 3. In wat volgt vermelden we niet meer in welke `FLOAT`-mode de grafische rekenmachine staat.

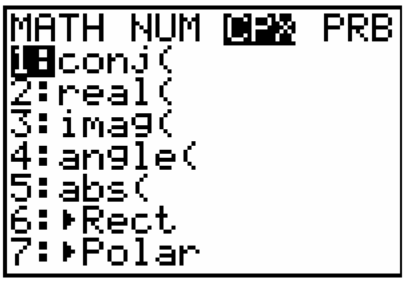
Mode `Real` of `a+bi`



Mode `re^θi`

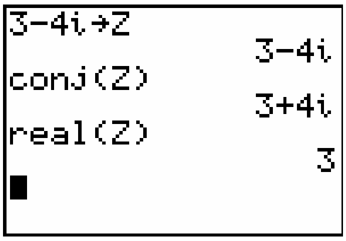


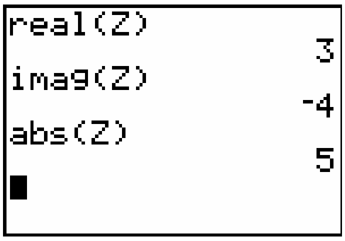
Het `MATH`-menu bevat een deelmenu `CPX` met de volgende functies specifiek voor complexe getallen.

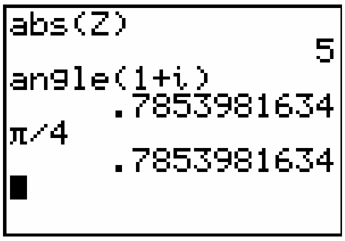


`1:conj(`	complex toegevoegde
`2:real(`	reële deel
`3:imag(`	imaginaire deel
`4:angle(`	argument
`5:abs(`	modulus
`6:▸Rect`	omzetting in cartesische vorm
`7:▸Polar`	omzetting in polaire vorm

Enkele voorbeelden:







3.5 Bewerkingen met complexe getallen in goniometrische vorm

Beschouw de complexe getallen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

3.5.1 Vermenigvuldiging

Er geldt :
$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2) \\ &= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

Modulus van het produkt = produkt van de moduli
Argument van het produkt = som van de argumenten

3.5.2 Deling

Na wat rekenwerk volgt: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

Modulus van het quotiënt = quotiënt van de moduli
Argument van het quotiënt = verschil van de argumenten

3.5.3 *n*-de macht

Voor $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ geldt $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

3.5.4 De formule van de Moivre

Voor een complex z met modulus gelijk aan 1 geldt: $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Met de formule van de Moivre kan men zeer vlug de volgende goniometrische formules bewijzen.

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i(2\sin\varphi\cos\varphi)$ en volgens de Moivre geldt:
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

Hieruit volgt dat $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ en $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

3.5.5 De formule van Euler

Het rekenwerk wordt met deze notatie weer vereenvoudigd. Voor $z_1 = r_1\,e^{i\varphi_1}$ en $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ geldt: $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\,e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = r_1r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ en $(z_1)^{-1} = \left(r_1\,e^{i\varphi_1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{r_1}e^{-i\varphi_1}$.

3.5.6 *n*-de machtswortels

DEFINITIE

Voor ieder complex getal a definiëren we een n-de machtswortel ($n \neq 0$) als een complex getal b waarvoor geldt dat $b^n = a$.

VOORBEELD

Welke complexe getallen zijn een vierkantswortel (2-de machtswortel) van –16?

Het is duidelijk dat deze vraag weer niet is op te lossen in $\mathbb{R}$. Maar in $\mathbb{C}$ heeft $-16 = 16i^2$ twee vierkantswortels nl. $-4i$ en $4i$.

EIGENSCHAP

Elk complex getal $z \neq 0$ heeft n n-de machtswortels.

Voor $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ is $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ een n-de machtswortel van a indien:

$$z^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho^n = r \text{ en } n\varphi = \alpha + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{en } \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \text{ met } k \in \mathbb{Z}$$

De n-de machts wortels van een complex getal $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ zijn:

$$\boxed{\sqrt[n]{r}(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)), \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Merk op dat we voor $k \in \{0,1,...,n-1\}$ n verschillende complexe getallen bekomen. Maar voor $k = n$ krijgen we hetzelfde complex getal als voor $k = 0$ en voor $k = n+1$ hetzelfde als voor $k = 1$, …

OPMERKING

De moduli van de n-de machtswortels van een complex getal zijn gelijk. M.a.w. in het complexe vlak liggen de bijbehorende punten op een cirkel.

De argumenten bepalen de ligging op deze cirkel, telkens een hoek $\frac{2\pi}{n}$ van mekaar.

Hieruit volgt dat de punten die de n-de machtswortels bepalen van een complex getal steeds een regelmatige n-hoek vormen.

VOORBEELD

De vierde machtswortels van $z = -8 - 8\sqrt{3}\, i = 16(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ zijn:

$$\sqrt[4]{16}(\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)),\quad k\in\mathbb{Z}$$

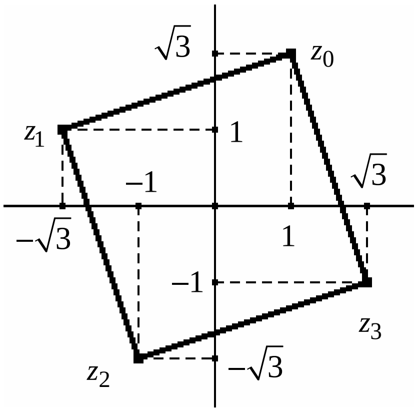
Uitgerekend geeft dit:

$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1+\sqrt{3}\, i$

$z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$

$z_2 = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1-\sqrt{3}\, i$

$z_3 = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3} - i$



3.5.7 Binomiaalvergelijkingen

Een binomiaalvergelijking in $\mathbb{C}$ is een vergelijking van de vorm $a\,z^n + b = 0$ met $a,b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ en $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Het oplossen van zo'n vergelijking $a\,z^n + b = 0$ komt neer op het berekenen van de n-de machtswortels van $\frac{-b}{a}$ in $\mathbb{C}$.

VOORBEELD

De oplossingen van $z^3 = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ zijn:

$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$, $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$ en

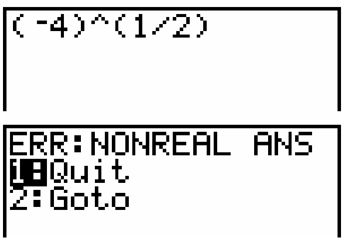
$z_2 = 2(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = -2\, i$.

Of nog: $z^3 = 8i \Leftrightarrow r^3 e^{3i\varphi} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow r^3 = 8$ en $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3},\ \ k\in\mathbb{Z}$.

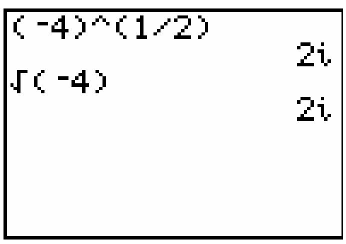
3.5.8 *n*-de machtswortels en binomiaalvergelijkingen met de TI-83/84 Plus

We bekijken even wat de resultaten zijn van $(-4)^{\frac{1}{2}}$ in de verschillende modes:

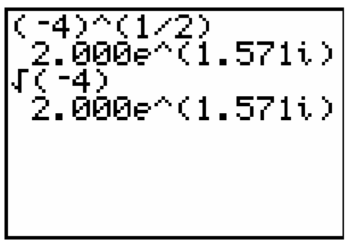
Real



a+bi



re^θi

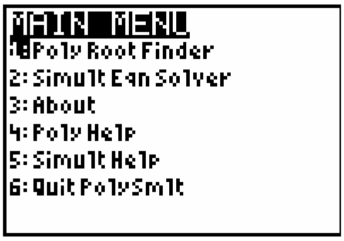


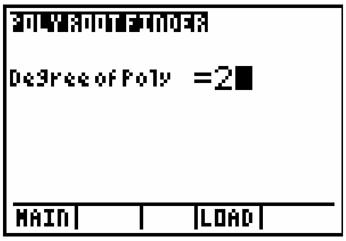
Om beide vierkantswortels van -4 te berekenen maken we gebruik van de Flash-applicatie *Polynomial Root Finder and Simultaneous Equation Solver* (gratis te downloaden via education.ti.com). Een handleiding van deze applicatie kan gedownload worden via education.ti.com/guides.

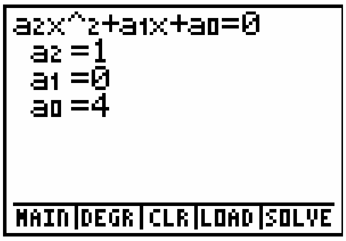
Hiermee lossen we de vergelijking $x^2 = -4$ op.

Na het opstarten van de applicatie kiezen we de optie `1:Poly Root Finder`. Ook hier kunnen we dezelfde drie modi instellen.

We voeren de graad en de coëficienten van de vergelijking in (bevestigen door op `[ENTER]` te drukken). De grafische toetsen zijn in deze applicatie functietoetsen. Druk op `[GRAPH]` (= `SOLVE`) om de vergelijking op te lossen.

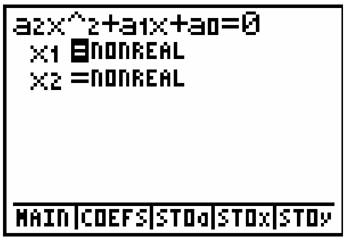




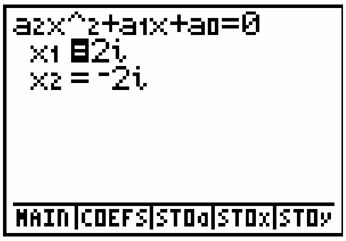


Ook hier kunnen we de vergelijking oplossen in de verschillende modi.

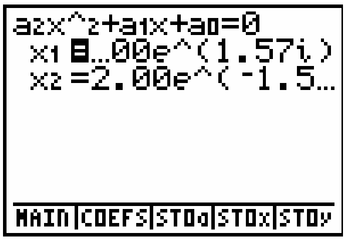
`Real`



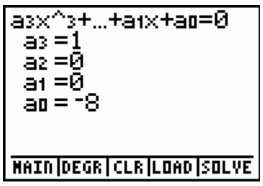
`a+bi`



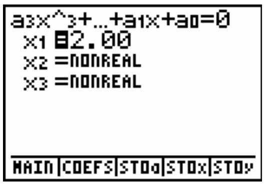
`re^θi`



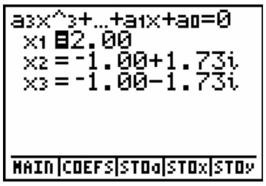
We bekijken als tweede voorbeeld de vergelijking $x^3 - 8 = 0$.



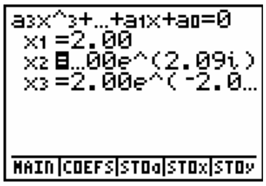
`Real`



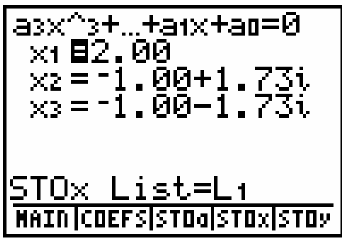
`a+bi`



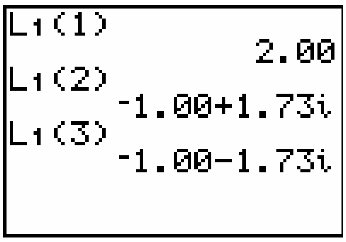
`re^θi`



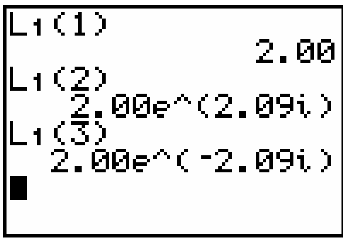
De oplossingen kunnen bewaard worden in een *lege* lijst met `STOx` om na het sluiten van de applicatie mee verder te rekenen.



`Real` of `a+bi`



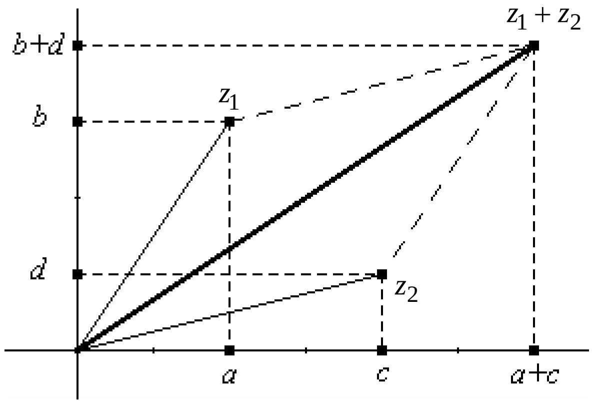
`re^θi`



4 Grafische voorstelling van bewerkingen

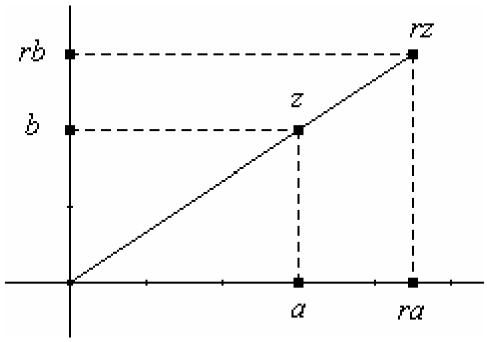
4.1 Som

De som van $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$, $z_1 + z_2$, bekomt men door een translatie (verschuiving) van z_1 over (c, d) of een verschuiving van z_2 over (a, b).



4.2 Scalaire vermenigvuldiging

De scalaire vermenigvuldiging van $z = a + bi$ met $r \in \mathbb{R}$, $r\,z$, is het beeld van z voor een homothetie met als centrum de oorsprong en als factor r.



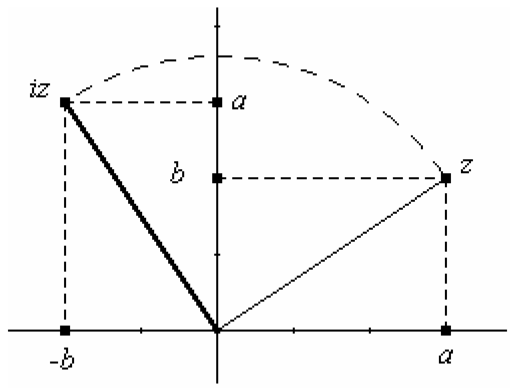
4.3 Vermenigvuldiging van *i* en *z*

Stel $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Er geldt $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ zodat

$$i \cdot z = r(\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right))$$

Vertrekkende van z bekomt men iz door een rotatie (draaiing) van z over 90° rond de oorsprong in tegenwijzerzin.

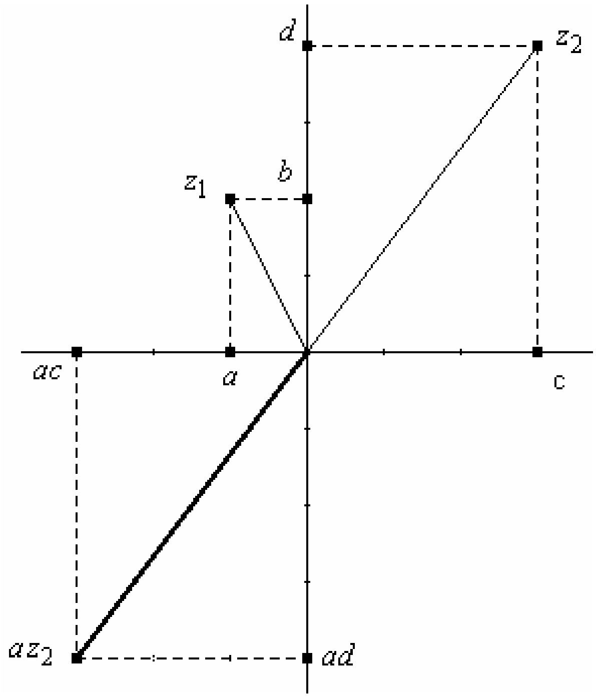


4.4 Vermenigvuldiging

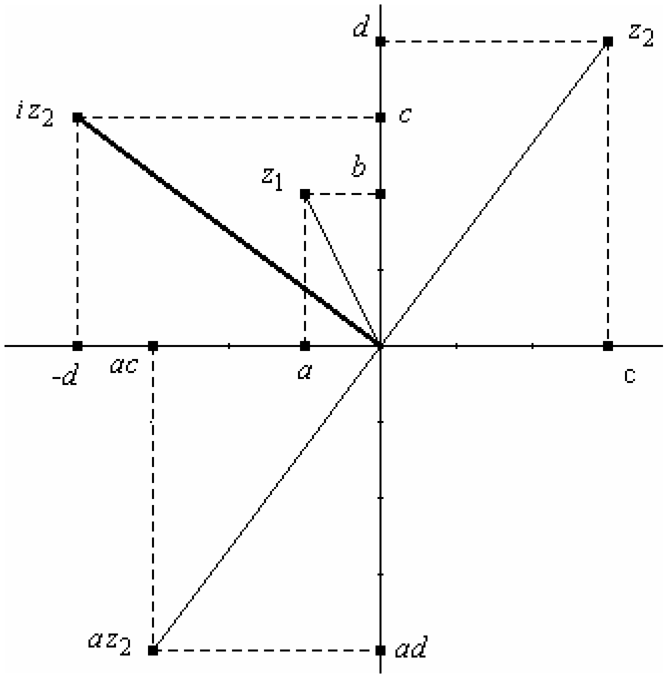
De vermenigvuldiging van $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ kan als volgt bekeken worden:

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot (c + di) + bi \cdot (c + di)$.

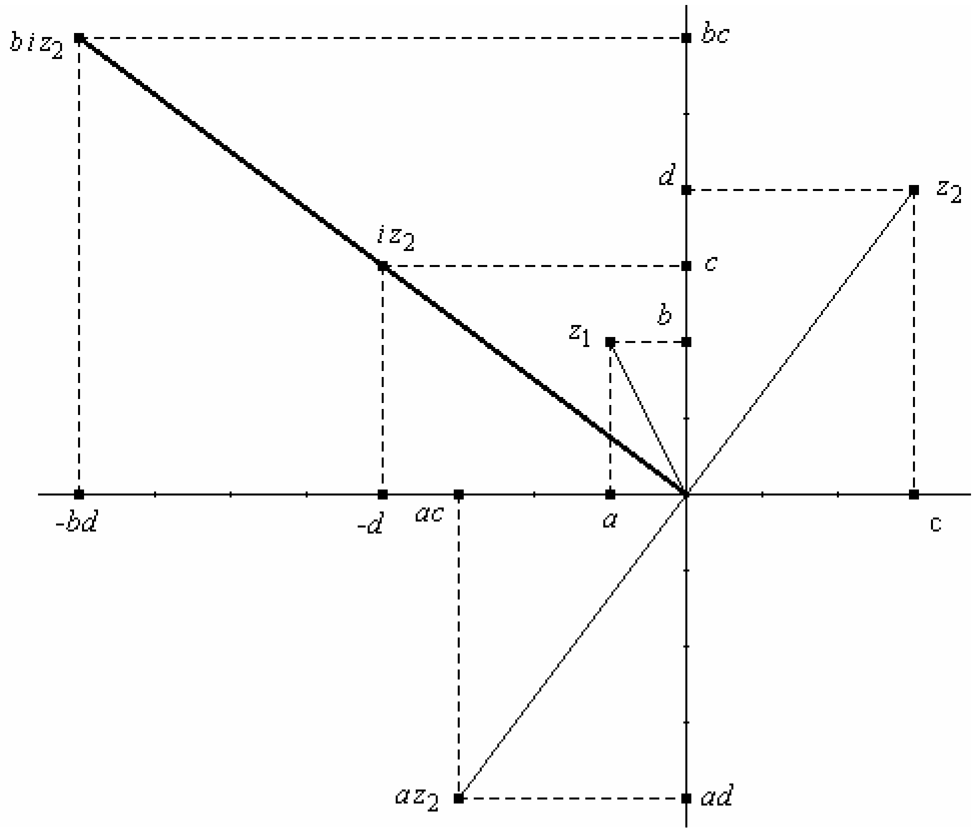
<u>1^E STAP</u> : $a \cdot (c + di)$ is het beeld van z_2 voor de homothetie met als factor a en als centrum de oorsprong.



2^E STAP: Voor het bepalen van $i \cdot (c+di)$ roteren we z_2 over 90°, t.o.v. de oorsprong in tegenuurwijzerzin.



3^E STAP: $bi \cdot (c+di)$ is het beeld van $i\,z_2$ voor de homothetie met als factor b en als centrum de oorsprong.



<u>*4^E STAP*</u>: $z_1 \cdot z_2$ is de diagonaal van het parallellogram met als zijden az_2 en $bi \cdot z_2$.