

5 Eenvoudige complexe functies

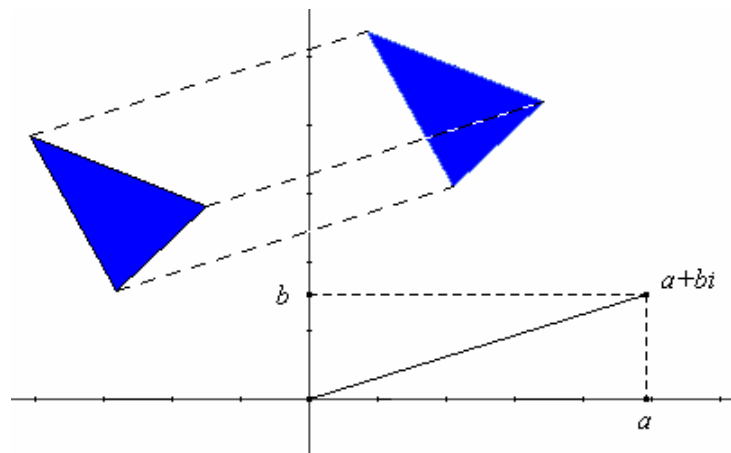
Bij complexe functies is zowel het domein als het beeld een deelverzameling van \mathbb{C} .

Toch kan men in eenvoudige gevallen het domein en het beeld in één vlak weergeven.

5.1 Functies van de eerste graad

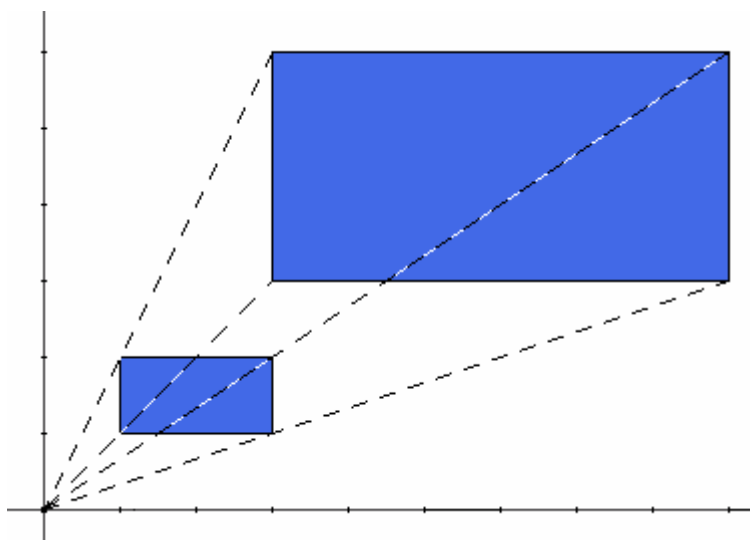
5.1.1 $f(z) = z + (a + bi)$

Bij elke complex getal z wordt $a + bi$ opgeteld en dus wordt elke z verschoven over (a, b) . Neem bij deze functie bijvoorbeeld als domein een driehoek. Het bereik is dan ook een driehoek.



5.1.2 $f(z) = az, a \in \mathbb{R}_0$

Elk complex getal z wordt vermenigvuldigd met a (homothetie met als centrum de oorsprong en als factor a)



5.1.3 $f(z) = cz, c \in \mathbb{C}_0$

Voor $c = a + bi$ is het beeld van elk complex getal z is de som van (zie punt 4.4):
het beeld van z voor een homothetie met centrum de oorsprong en factor a en
het beeld van iz voor een homothetie met centrum de oorsprong en factor b .

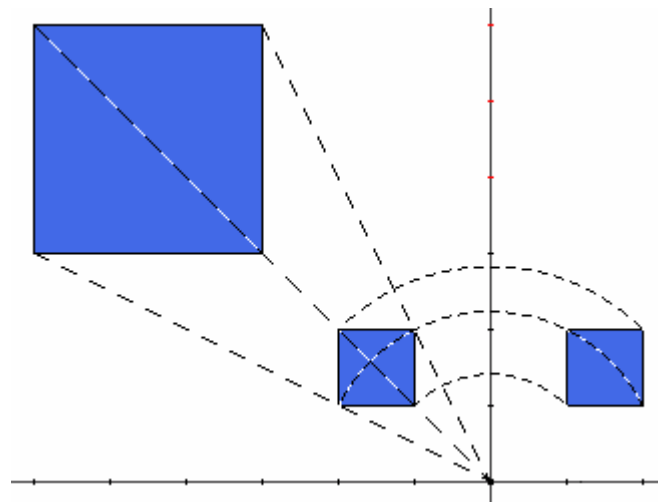
Hoe zal in dit geval het beeld van een vierkant eruit zien?

Om hier een antwoord op te geven schrijven we de parameter c en de variabele z van het functievoorschrift in hun goniometrische vorm.

Stel $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ en $c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ dan bekommen we:

$$f(z) = c \cdot z = r\rho(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)).$$

Het bepalen van het beeld van een vierkant in het complexe vlak voor de functie f komt neer op het uitvoeren van een draaivermenigvuldiging – d.w.z. een draaiing rond de oorsprong (over een hoek α) gevolgd door een vermenigvuldiging (homothetie) met als centrum de oorsprong en als factor $|c|$.



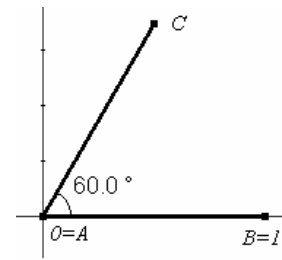
5.1.4 $f(z) = cz + d, c \in \mathbb{C}_0$

Deze eerstegraadsfunctie bepaalt in het complexe vlak een draaiing over een hoek α (argument van c) rond de oorsprong, gevolgd door een vermenigvuldiging (met als centrum de oorsprong en als factor $|c|$) en daarna een translatie (met als verplaatsing d).

VOORBEELD

- De functie $f_1(z) = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot z$ zorgt voor een draaiing rond de oorsprong over een hoek van 60° in tegenwijzerzin.

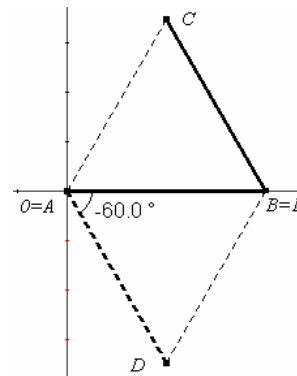
Het beeld van het lijnstuk $[AB]$ is gelijk aan het lijnstuk $[AC]$. Om het rekenwerk te vereenvoudigen kozen we $B = 1$.



Het complex getal behorende bij het punt C is $f_1(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- We zoeken nu het functievoorschrift van een tweede functie f_2 die de draaiing van het lijnstuk $[AB]$ uitvoert rond B over een hoek van 60° in wijzerszin, dus over hoek van -60° .

Er geldt dat we deze draaiing over -60° met als centrum B kunnen vervangen door een draaiing van -60° rond de oorsprong gevolgd door een translatie.



Het functievoorschrift van f_2 is van de vorm:

$$f_2(z) = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot z + d = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot z + d.$$

Daar $f_2(B) = B$ geldt: $f_2(1) = 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + d \Leftrightarrow d = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

M.a.w. $f_2(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

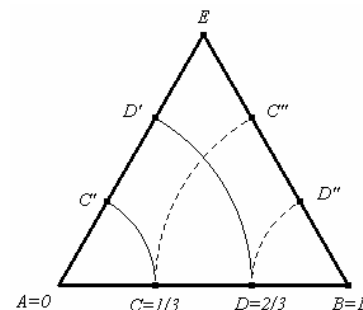
- We verdelen het lijnstuk $[AB]$ in drie gelijke delen en berekenen de punten C' , D' , C'' en D'' met de functies f_1 en f_2 .

$$C' = f_1\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$$D' = f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

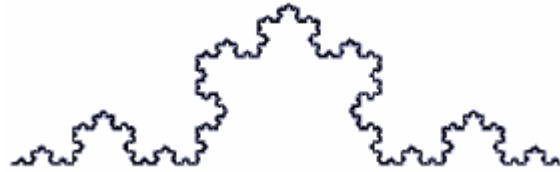
$$C'' = f_2\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$D'' = f_2\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$



5.2 De Koch-kromme

Helge von Koch (1870-1924) was een Zweedse wiskundige die in 1904 de kromme ontdekte die de dag van vandaag de Koch-kromme genoemd wordt.



De Koch-kromme is een voorbeeld van de ontdekking van Weierstrass (1815-1897) die in die periode een crisis veroorzaakte in het wiskundig denken. Hij ontdekte een kromme die nergens afleidbaar is.

De meetkundige constructie van de Koch-kromme verloopt als volgt.

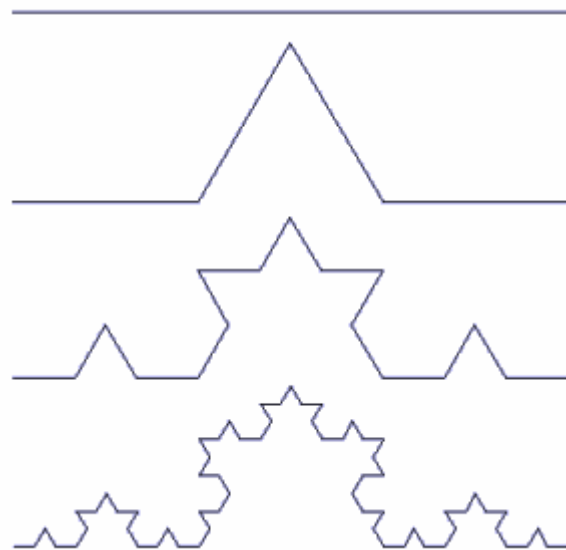
We starten met een lijnstuk.

We verdelen dit lijnstuk in drie gelijke delen en het middelste gedeelte vervangen we door een gelijkzijdige driehoek zonder basis.

In een volgende stap passen we dezelfde constructie toe op ieder lijnstuk van de vorige constructie

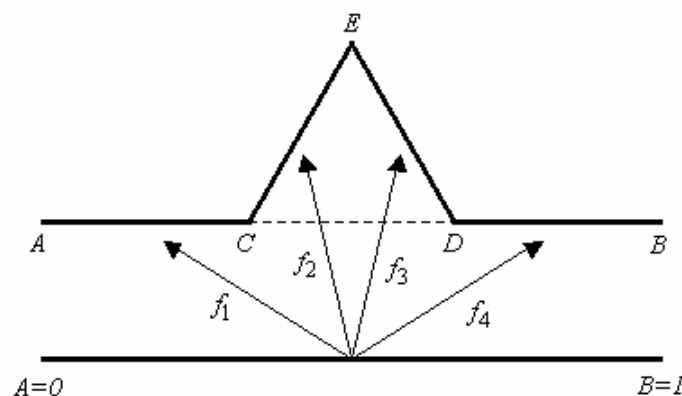
Op ieder lijnstuk van de zo ontstane nieuwe figuur passen we weer deze constructie toe,

De limietfiguur die ontstaat uit dit iteratieproces noemt men de Koch-kromme, die men een klassieker mag noemen in de wereld van fractalen.



We gebruiken de ideeën uit het voorbeeld van 5.1.4 om de punten (complexe getallen) te berekenen die in iedere stap verbonden moeten worden met lijnstukken.

Om de Koch-kromme te construeren maken we gebruik van vier complexe functies van de eerste graad. We bepalen de functies f_1, f_2, f_3, f_4 zodat $f_1([AB]) = [AC]$, $f_2([AB]) = [AC]$, $f_3([AB]) = [AC]$ en $f_4([AB]) = [AC]$ (zie onderstaande figuur).



De functie f_1 is een homothetie met schaalfactor $1/3$ en als centrum de oorsprong.

M.a.w. $f_1(z) = \frac{1}{3}z$. Hieruit volgt vanzelfsprekend dat $C = f_1(B) = f_1(1) = \frac{1}{3}$.

De functie f_2 is de samenstelling van een homothetie met als centrum de oorsprong en factor $1/3$, een rotatie rond de oorsprong over een hoek van 60° (in tegenwijzerszin) en een translatie over een afstand $1/3$. Het functievoorschrift van f_2 wordt gegeven door:

$$f_2(z) = \frac{1}{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot z + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot z + \frac{1}{3} = (\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i) \cdot z + \frac{1}{3}.$$

Hieruit volgt: $E = f_2(B) = (\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$.

De functie f_3 is de samenstelling van een homothetie met als centrum de oorsprong en factor $1/3$, een rotatie rond de oorsprong over een hoek van -60° en een translatie over een afstand d . Het functievoorschrift van f_3 is:

$$f_3(z) = \frac{1}{3}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) \cdot z + d = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot z + d = (\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i) \cdot z + d.$$

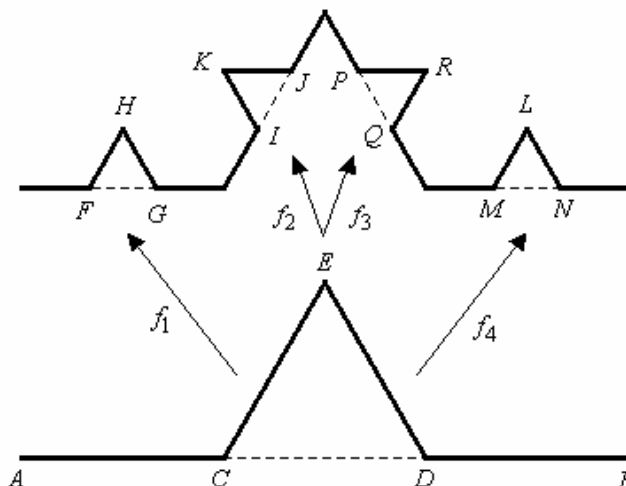
We bepalen d : $f_3(A) = E \Leftrightarrow f_3(0) = d = E = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$.

Het functievoorschrift wordt: $f_3(z) = (\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i) \cdot z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$.

De functie f_4 is de samenstelling van een homothetie met schaalfactor $1/3$ en als centrum de oorsprong en een verplaatsing over een afstand $2/3$: $f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$.

Vanzelfsprekend geldt $f_4(A) = D = f_4(0) = \frac{2}{3}$.

Om de tweede stap te tekenen berekenen we de beelden van de punten C , D , E voor de functies f_1, f_2, f_3, f_4 .



- $\underline{f_1(z) = \frac{1}{3}z}$

$$F = f_1(C) = f_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$G = f_1(D) = f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$H = f_1(E) = f_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$$

- $\underline{f_2(z) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot z + \frac{1}{3}}$

$$I = f_2(C) = f_2\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$$

$$J = f_2(D) = f_2\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9}i$$

$$K = f_2(E) = f_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}i$$

- $\underline{f_3(z) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i}$

$$P = f_3(C) = f_3\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{5}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9}i$$

$$Q = f_3(D) = f_3\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{11}{18} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$$

$$R = f_3(E) = f_3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}i$$

- $\underline{f_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}}$

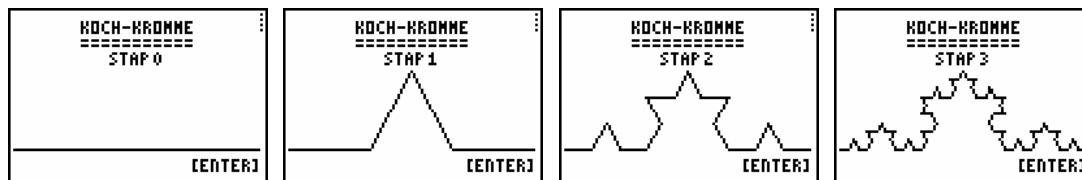
$$M = f_4(C) = f_4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$$

$$N = f_4(D) = f_4\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

$$L = f_4(E) = f_4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{18}i$$

Het verder zetten van dit iteratieproces met de functies f_1, f_2, f_3, f_4 convergeert naar de Koch-Kromme.

Het volgende programma – KOCH.8xp - toont, zonder gebruik te maken van recursiemethoden, hoe het mogelijk is om enkele stappen in de constructie van de Koch-kromme te tekenen met de TI-83/84 Plus gebruikmakend van de punten *A*, *B*, *C*, *D*.



```

Cl rDraw: AxesOff
OüXmi n: 1üXmax: 1üXscl : ú. 1üYmi n: . 5üYmax: 1üYscl : 1üXres
Text(2, 26, "KOCH-KROMME"): Text(8, 26, "====="): Text(14, 37, "STAP 0")
Li ne(0, 0, 1, 0): Text(55, 69, "[ENTER]")
Pause: Cl rDraw
Text(2, 26, "KOCH-KROMME"): Text(8, 26, "====="): Text(14, 37, "STAP 1")
Li ne(0, 0, 1/3, 0): Li ne(1/3, 0, 1/2, 0(3)/6): Li ne(1/2, 0(3)/6, 2/3, 0): Li ne(2/3, 0, 1, 0)
Text(55, 69, "[ENTER]")
Pause: Text(14, 37, "WACHT! ")
Li stämatr({0, 0}, {1/3, 0}, {1/2, 0(3)/6}, {2/3, 0}, [A]): [A]öü[A]
randM(4, 2)ü[B]
For(I, 1, 4)
1/3*[A](I, 1)ü[B](I, 1): 1/3*[A](I, 2)ü[B](I, 2)
End
randM(4, 2)ü[C]
For(I, 1, 4)
1/6*[A](I, 1)-0(3)/6[A](I, 2)+1/3ü[C](I, 1): 1/6*[A](I, 2)+0(3)/6[A](I, 1)ü[C](I, 2)
End
randM(4, 2)ü[D]
For(I, 1, 4)
1/6*[A](I, 1)+0(3)/6[A](I, 2)+1/2ü[D](I, 1): 1/6*[A](I, 2)-0(3)/6[A](I, 1)+0(3)/6ü[D](I, 2)
End
randM(4, 2)ü[E]
For(I, 1, 4)
1/3*[A](I, 1)+2/3ü[E](I, 1): 1/3*[A](I, 2)ü[E](I, 2)
End
augment(augment(augment([B]ö, [C]ö), [D]ö), [E]ö)ü[A]: [A]öü[A]
Cl rDraw: Text(2, 26, "KOCH-KROMME"): Text(8, 26, "====="): Text(14, 37, "STAP 2")
For(K, 1, 15)
Li ne([A](K, 1), [A](K, 2), [A](K+1, 1), [A](K+1, 2))
End
Li ne([A](16, 1), [A](16, 2), 1, 0): Text(55, 69, "[ENTER]")
Pause : Text(14, 37, "WACHT! ")
randM(16, 2)ü[B]
For(I, 1, 16)
1/3*[A](I, 1)ü[B](I, 1): 1/3*[A](I, 2)ü[B](I, 2)
End
randM(16, 2)ü[C]
For(I, 1, 16)
1/6*[A](I, 1)-0(3)/6[A](I, 2)+1/3ü[C](I, 1): 1/6*[A](I, 2)+0(3)/6[A](I, 1)ü[C](I, 2)
End
randM(16, 2)ü[D]
For(I, 1, 16)
1/6*[A](I, 1)+0(3)/6[A](I, 2)+1/2ü[D](I, 1): 1/6*[A](I, 2)-0(3)/6[A](I, 1)+0(3)/6ü[D](I, 2)
End
randM(16, 2)ü[E]
For(I, 1, 16)
1/3*[A](I, 1)+2/3ü[E](I, 1): 1/3*[A](I, 2)ü[E](I, 2)
End
augment(augment(augment([B]ö, [C]ö), [D]ö), [E]ö)ü[A]: [A]öü[A]
Cl rDraw: Text(2, 26, "KOCH-KROMME"): Text(8, 26, "====="): Text(14, 37, "STAP 3")
For(K, 1, 63)
Li ne([A](K, 1), [A](K, 2), [A](K+1, 1), [A](K+1, 2))
End
Li ne([A](64, 1), [A](64, 2), 1, 0): Text(55, 69, "[ENTER]")
Pause
Cl rDraw: Zstandard: AxesOn: Di sp : Stop

```

5.3 Functies van de tweede graad

5.3.1 Kwadraat van een complex getal

Beschouw de complexe functie $f(z) = z^2$.

Voor iedere $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ geldt:

$$f(z) = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^2 = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha).$$

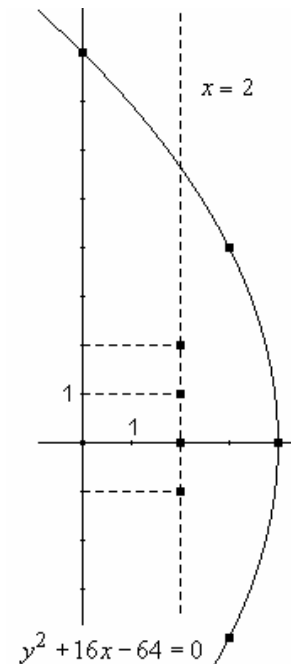
Het kwadrateren van een complex getal komt met andere woorden neer op het kwadrateren van de modulus en het verdubbelen van het argument.

- Neem als domein de rechte evenwijdig met de imaginaire as en door $z = 2$.

We bekijken de beelden van enkele punten:

z	r	$\text{Arg } z$	r^2	$2 \text{ Arg } z$
$2 - 2i$	$\sqrt{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	8	$-\frac{\pi}{2}$
$2 - i$	$\sqrt{5}$	-.463	5	-.927
2	2	0	4	0
$2 + i$	$\sqrt{5}$.463	5	.927
$2 + 2i$	$\sqrt{8}$	$\frac{\pi}{4}$	8	$\frac{\pi}{2}$

De complexe getallen met als poolcoördinaten de koppels $(r^2, 2\text{Arg } z)$, waarbij (r, z) telkens behoort tot de rechte $x = 2$, liggen op een parabool met als vergelijking $y^2 + 16x - 64 = 0$.

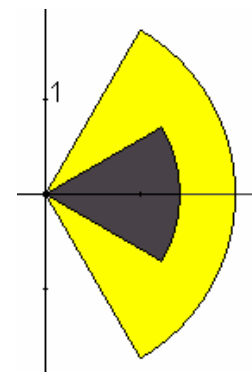


- Beschouw als domein de complexe getallen die gelegen zijn in de cirkelsector met straal $\sqrt{2}$ en argumenten tussen $-\frac{\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6}$.

Het beeld van deze cirkelsector zijn de complexe getallen gelegen in een cirkelsector met straal 2 en

argumenten tussen $-\frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{3}$.

De verhouding van de oppervlakte van het beeld t.o.v. de oppervlakte van het domein is het dubbel van het kwadraat van de straal van het domein.



5.3.2 Julia-verzamelingen

We bekijken de complexe functie $f(z) = z^2$ op een iets wat meer dynamische manier. We gebruiken f in een iteratieproces op de volgende manier.

Voor ieder complex getal z geeft iteratie van de functie f de volgende rij complexe getallen:

$$z_0 = z, z_1 = f(z_0) = z^2, z_2 = f(z_1) = z^4, z_3 = f(z_2) = z^8, \dots, z_n = f(z_{n-1}) = z^{2^n}, \dots$$

Deze rij noemen we de baan van z . De volgende tabel beschrijft de iteratie in drie verschillende punten.

	r	α	r	α	r	α
z	0.4	10	1	125°	2	35°
z^2	0.16	20	1	250°	4	70°
z^4	0.0256	40	1	140°	16	140°
z^8	$6.5536 \cdot 10^{-4}$	80	1	280°	256	280°
z^{16}	$4.29 \cdot 10^{-7}$	160	1	200°	65536	200°
z^{32}	$1.8404 \cdot 10^{-13}$	320	1	40°	4294967296	40°

Deze tabel illustreert mooi het dynamische gedrag van de functie $f(z) = z^2$.

- Een startwaarde binnen de eenheidscirkel ($|z| < 1$) heeft een baan die convergeert naar de oorsprong.
- Een startwaarde op de eenheidscirkel ($|z| = 1$) genereert een baan die steeds op de eenheidscirkel blijft.
- En indien we de iteratie starten buiten de eenheidscirkel zal de baan iedere cirkel rond de oorsprong verlaten. Men noemt de baan dan onbegrensd.

De functie $f(z) = z^2$ verdeelt zo het complexe vlak in twee gebieden.

Een eerste gebied bestaat uit punten waarvan de baan onbegrensd is en een tweede gebied uit punten waarvan de baan begrensd is. De grens tussen deze twee gebieden, de eenheidscirkel, noemt men de Julia-verzameling van de functie $f(z) = z^2$.

In 1918 publiceerde Gaston Julia (1893-1978) een meesterwerk over iteraties van rationale functies. Hij kan beschouwd worden als één der voorvaders van de tak van de wiskunde die men de dag van vandaag Dynamische Systemen noemt.

Een onderdeel van zijn werk bestond uit de studie van het dynamische gedrag van de complexe functies $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^2 + c$ met $c \in \mathbb{C}$.

We bekeken al het geval $c = 0$. In het algemeen geeft iteratie van de functie $f(z) = z^2 + c$ met $c \in \mathbb{C}$ voor ieder complex getal c de baan:

$$z \mapsto z^2 + c \mapsto (z^2 + c)^2 + c \mapsto ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto (((z^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$$

Deze baan voldoet steeds aan één van de twee volgende eigenschappen.

- (i) De baan is onbegrensd, d.w.z. de elementen van de baan verlaten iedere cirkel rond de oorsprong.
- (ii) De baan is begrensd, d.w.z. dat de elementen van de baan steeds in een cirkel met een bepaalde straal rond de oorsprong blijven.

De verzamelingen van de complexe getallen die aan één van de bovenstaande eigenschappen voldoen zijn niet leeg. Dit volgt respectievelijk uit het volgende:

- (i) Voor $|z| > \max\{|c|, 2\}$ bestaat een $\varepsilon > 0$ zodat $|z| = 2 + \varepsilon$.

Dan geldt $|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|$ waaruit volgt:

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = (|z| - 1)|z| = (1 + \varepsilon)|z|.$$

De modulus van de elementen van de baan zal in dit geval toenemen met minstens een factor $1 + \varepsilon$ zodat de baan duidelijk onbegrensd is.

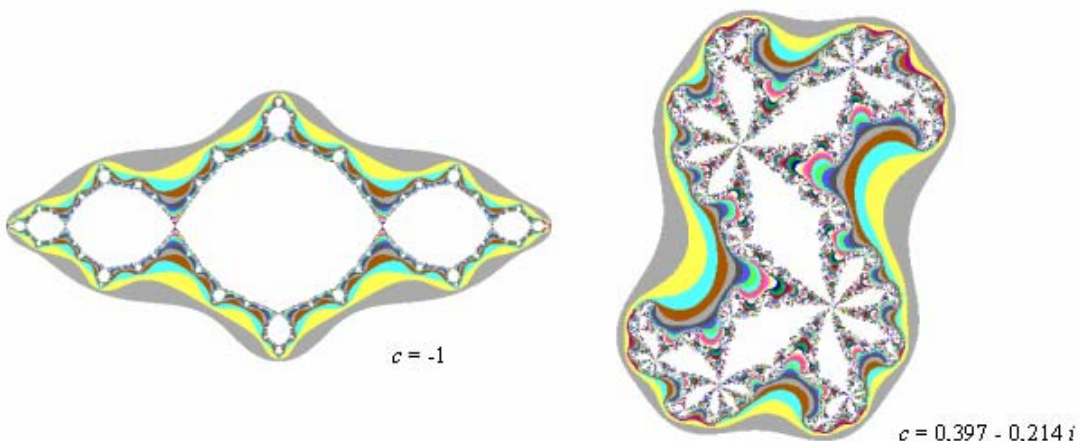
- (ii) De vergelijking $z = z^2 + c$ heeft oplossingen in \mathbb{C} . Voor de oplossingen van deze vergelijking geldt $f(z) = z$. Voor deze complexe getallen bestaat de baan uit één punt. Een complexe getal z waarvoor geldt dat $f(z) = z$ noemt men een fixpunt.

De verzameling van complexe getallen die voldoen aan de tweede eigenschap noemt men de uitgebreide Julia-verzameling van de functie $f(z) = z^2 + c$.

Wiskundig definieert men de Julia-verzameling van de functie $f(z) = z^2 + c$ als de rand van de uitgebreide Julia-verzameling.

Intuïtief betekent dit dat de Julia-verzameling de grens aangeeft tussen de punten waarvan de baan begrensd blijft en de punten waarvan de baan naar oneindig gaat. In wat volgt noemen we de uitgebreide Julia-verzameling gewoon de Julia-verzameling.

Hieronder vind je een afbeelding van twee Julia-verzamelingen horende bij de functie $f(z) = z^2 + c$ met $c \in \mathbb{C}$.



De bovenstaande figuren zijn gemaakt met het programma FRACTINT dat gratis kan gedownload worden via de *Spanky Fractal Database* (spanky.triumf.ca).

In zijn meesterwerk bewees Julia dat de Julia-verzamelingen behorende bij de functies $f(z) = z^2 + c$ ofwel samenhangend zijn ofwel totaal on samenhangend. Julia bewees de volgende dichotomie van de complexe getallen:

Voor de Julia-verzameling, J_c , behorende bij de functie $f(z) = z^2 + c$ geldt:

J_c is samenhangend indien de baan van nul begrensd is en

J_c is on samenhangend indien de baan van nul on begrensd is.

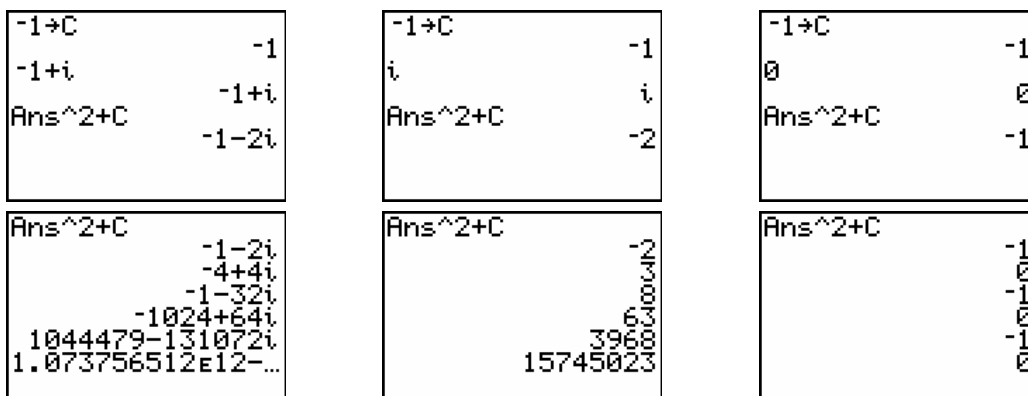
De baan van nul voor de functie $f(z) = z^2 + c$ wordt gegeven door:

$$0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$$

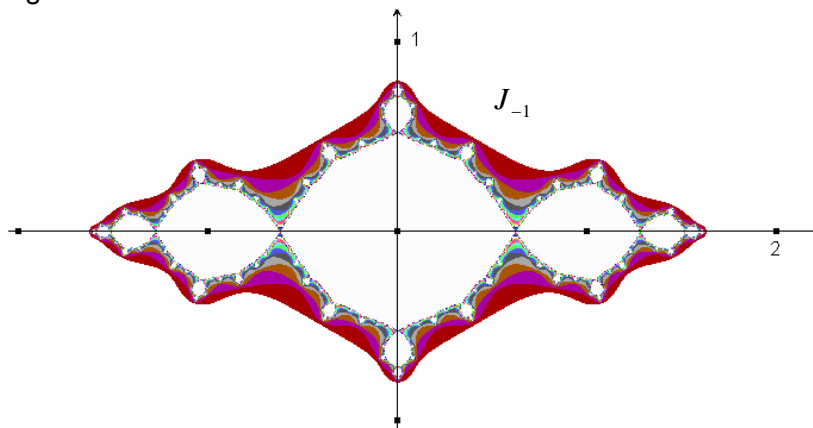
Ruwweg kunnen we zeggen dat een samenhangende verzameling uit één stuk bestaat; zoals bijvoorbeeld de eenheidsschijf, behorende bij $f(z) = z^2$, of de twee vorige figuren. Zonder verder uit te weiden bestaat een totaal on samenhangende verzameling uit oneindig veel stukken. Zo'n verzameling kan gevisualiseerd worden door een wolk van punten waarbij er geen enkele twee punten mekaar raken en waarbij er in de omgeving van ieder punt er zich oneindig veel punten van dat punt verwijderen. In de literatuur spreekt men van een Cantor-verzameling.

Uit deze dichotomie volgt dat er geen Julia-verzameling J_c bestaat die bijvoorbeeld samengesteld is uit vijf disjuncte stukken.

Met de TI-83/84 Plus kan de begrensheid van banen bestudeerd worden met de ANS-toets. Stel bv. $c = -1$. We kijken even de banen van $-1+i$ en i .



De theorie van Julia zegt, zie bovenstaande berekeningen, dat de complexe getallen $-1+i$ en i niet behoren tot J_{-1} . Wel geldt dat J_{-1} samenhangend is daar de baan van nul begrensd is.



5.4 De Mandelbrot-verzameling

Eén van de mooiste en meest fascinerende figuren uit de wiskunde is de Mandelbrot-verzameling, die ontdekt werd door Benoit Mandelbrot rond 1980.

Velen, ook personen die helemaal niet thuis zijn in het vakgebied wiskunde, hebben al kennis gemaakt met deze schoonheid. Maar slechts enkelen van hen kennen de wiskundige fundamenteën van de Mandelbrot-verzameling.

Het werk van Julia geraakte in de vergeethek tot Mandelbrot in 1977 interesse toonde in dit werk. D.m.v. van computereperimenten toonde Mandelbrot dat het werk van Julia een bron is van heelwat prachtige fractalen.

De Mandelbrot-verzameling is ook gebaseerd op het dynamisch gedrag van de functies $f(z) = z^2 + c$ met $c \in \mathbb{C}$.

De idee van Mandelbrot was de dichotomie van Julia grafisch voor te stellen.

Hij berekende voor iedere $c \in \mathbb{C}$ de baan van 0 onder iteratie van de functie $f(z) = z^2 + c$: $0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$

Voor het bestuderen van het al dan niet begrensd zijn van deze rij is het voldoende de rij $c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$ te bestuderen.

Voor $c = i$ is de baan van 0 gegeven door: $0 \mapsto i \mapsto -1 + i \mapsto -i \mapsto -1 + i \mapsto -i \mapsto \dots$

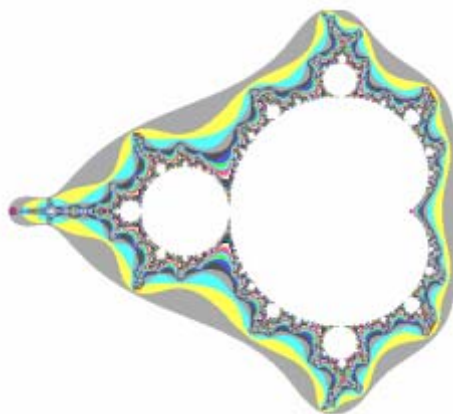
We zien dat de baan in dit geval convergeert naar een 2-cyclus.

Voor $c = 2i$ wordt de baan van 0: $0 \mapsto 2i \mapsto -4 + 2i \mapsto 12 - 14i \mapsto -52 - 344i \mapsto \dots$
m.a.w. de baan van 0 zal zich steeds verder en verder verwijderen van de oorsprong.

Weer kan gebruik gemaakt worden van de grafische rekenmachine om na te gaan of een complex getal c behoort tot de Mandelbrotverzameling. Duidelijk geldt dat i behoort tot de Mandelbrot-verzameling en $2i$ niet.

De Mandelbrot-verzameling bestaat uit deze c -waarden waarvoor de baan van 0 begrensd blijft, m.a.w. deze c -waarden waarvoor de bijhorende Julia-verzameling samenhangend is.

Door dit procédé te vertalen naar een computeralgoritme bekwam B. Mandelbrot de onderstaande witte figuur.



De idee achter dit algoritme is het volgende.

Beschouw het computerscherm als een gedeelte van het complexe vlak. Voor ieder pixel $c \in \mathbb{C}$ wordt de computer gevraagd na te gaan of de baan van nul naar oneindig gaat of niet. In het tweede geval wordt het pixel wit gekleurd, in het andere geval wordt een andere kleur gebruikt.

Hoe kan de computer controleren of een baan naar oneindig gaat of niet ?

Men kan nagaan dat de complexe getallen die tot de Mandelbrot-verzameling behoren op een afstand kleiner of gelijk aan 2 van de oorsprong liggen.

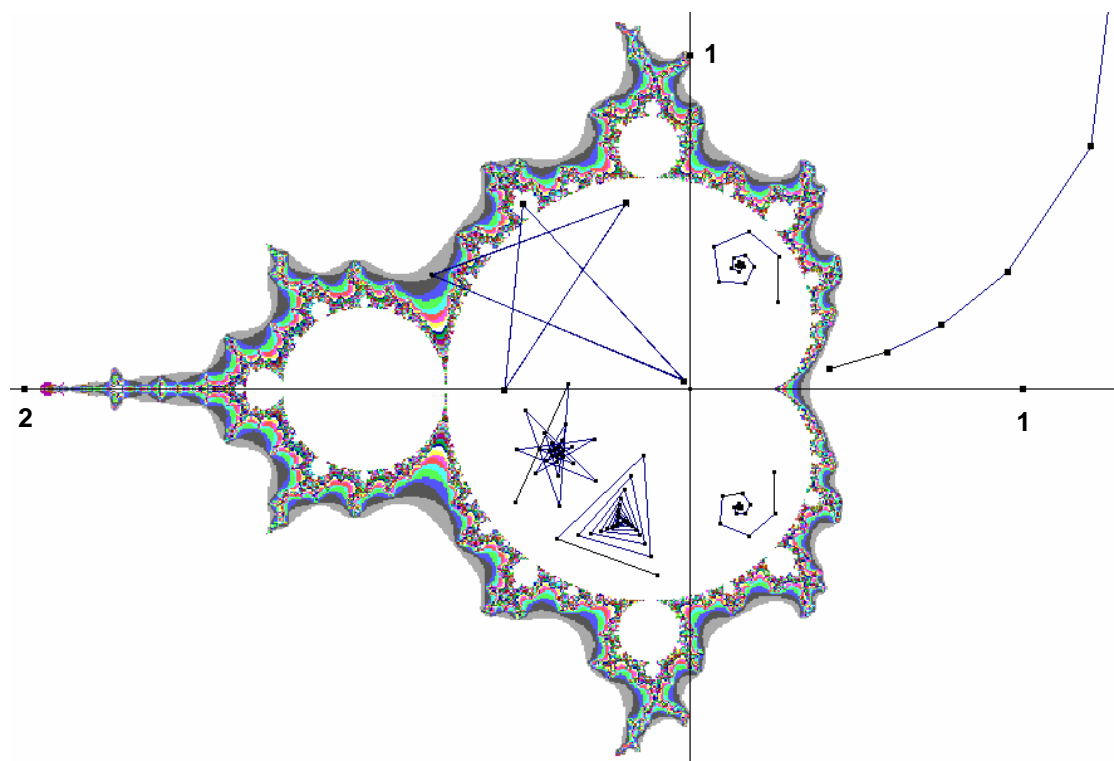
Er geldt dat indien de baan van 0 onder iteratie d.m.v. de functie $f(z) = z^2 + c$ ($c \in \mathbb{C}$ met $|c| \leq 2$) ooit de cirkel met middelpunt de oorsprong en straal 2 overschrijdt, de baan van nul naar oneindig gaat.

We laten de computer bijvoorbeeld de eerste 1000 iteraties berekenen en telkens controleren of de baan zich niet verder dan een afstand 2 van de oorsprong heeft verwijderd.

Blijven we 1000 iteraties lang binnen de cirkel met straal 2 rond de oorsprong dan kleuren we het pixel wit en in het andere geval kiezen we een kleur afhankelijk van het aantal stappen dat nodig is om buiten de gekozen cirkel te treden.

Merk op dat de afbeelding slechts een benadering is van de Mandelbrot-verzameling daar de computer slechts een eindig aantal iteraties kan uitvoeren.

De onderstaande figuur toont de ligging van de mandelbrotverzameling samen met de banen van 0 behorende bij enkele complexe getallen c .



De Mandelbrot-verzameling is een voedingsbodem voor tal van artistieke computer graphics. Overtuig jezelf door de Mandelbrot-verzameling te exploiteren, bijvoorbeeld door middel van de software FRACTINT (spanky.triumf.ca). Hieronder vind je enkele vergrotingen van de rand van de Mandelbrot-verzameling.

