SEPTEMBERCURSUS WISKUNDE

DAG 1

Elementaire rekenvaardigheden
Exponentiële en logaritmische functies
Goniometrie en driehoeksmeting

Deel 1 van de septembercursus bevat een aantal basisoefeningen omtrent rekenen met machten, logaritmen + (drie)hoeken en de bijhorende functieklassen. Deze moet je vlot kunnen oplossen om een goede start te nemen voor de opleiding Industriële Wetenschappen van de gezamenlijke opleiding van UHasselt en KU Leuven in Diepenbeek. Als achtergrondinformatie kan je de MOOC 'Wiskunde voor (startende) studenten' gebruiken. Hiervoor kan je je gratis registreren op deze website:

https://iiw.kuleuven.be/studeren/toekomstigestudenten/mooc-wiskunde

Bij de oefeningen in deze tekst verwijzen we regelmatig naar bepaalde modules uit de MOOC zodat je gericht op zoek kan gaan naar de nodige uitleg als je tijdens de zomervakantie zelf al thuis aan de slag wil.
De tijd is sowieso te beperkt om **ALLE** leerstof live op de campus uit de doeken te doen. Tijdens een gemeenschappelijk theorie-uurtje in de voor- **EN** namiddag zetten we de belangrijkste zaken op een rij met veel voorbeelden en praktische (reken)tips. Volgende modules staan op dag 1 in de kijker:

- MODULE 1.2: bewerkingen
- MODULE 2.1: functies
- MODULE 3.1: goniometrie en driehoeksmeting

Na de theorie en een korte pauze volgt er een oefensessie van 2 uur op de campus. Tijdens deze sessie is er tijd om vragen te stellen en ook zelf (in kleinere groep) oefeningen op te lossen onder begeleiding van een docent.

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

OPGAVE OEFENINGEN

Hoe is het gesteld met je rekenvaardigheden (zonder rekentoestel!) ? Bij wijze van opwarming kan je vooraf bij je thuis je parate kennis over “bewerkingen” testen door de 24 korte vragen te beantwoorden die bijeengezet staan in module 1.2.13.
Zo heb je meteen een zicht op je sterke of (mogelijk) zwakke plekken. Ook over (eenvoudige) functies staat een mini-herhalingstest van 8 vragen in de MOOC opgenomen in module 2.1.17. Zit er hier eveneens direct een topscore in?

Dit is echter nog maar het topje van de reken- en functie-ijsberg dat we zo beklimmen. Vandaar dat we hier nog een uitgebreidere oefenlijst hebben samengesteld aangevuld met goniometrisch getinte vraagstukken. Als deze ook allemaal lukken ben je helemaal klaar voor de start van het academiejaar. Succes!

1. Bereken zonder de hulp van je rekentoestel:

a) -5^2

b) $\dfrac{5\cdot10^{-3}\cdot4\cdot10^{-2}}{(10^{-3}\cdot10^{-2})^2}$

c) $\sqrt[5]{-\dfrac{1}{32}}$

d) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{-2/3}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

f) $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$

2. Vereenvoudig zonder de hulp van je rekentoestel:

a) $\dfrac{\left(-2a^3b^4\right)^3\cdot(-4a)^2}{(-a)^4\cdot(-a^4)\cdot(-2ab^2)^6}$

b) $\dfrac{\left(a^{1/2}\,b\right)^4\cdot\left(b^2c^{1/3}\right)^{-2}}{\left(a^2bc^{1/3}\right)^{-2}}$

c) $\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$

d) $\sqrt{\dfrac{a^2(bc^3)^4}{\sqrt[3]{(c^{-4})^{-9}}}}$

TIP bij oefening 1 en 2: Bestudeer de voorbeelden + rekenregels voor machten en wortels in module 2.1.10.

3. Reken uit zonder de hulp van je rekentoestel:

a) $\log_{16}(4)$

b) $\log_4(8\sqrt{2})$

c) $\log_{1/9}(3)$

d) $4^{\log_2(10)}$

e) $27^{\log_3(2)}$

f) $\mathrm{e}^{3\ln(2)}$

g) $\ln\left(\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{e}^8)}\right)$

h) $\mathrm{e}^{-2\ln(3)}\cdot\ln\left(\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}\right)$

4. Schrijf als één logaritme:

a) $\log 7 + \log 4$

b) $\log_3 10 - \log_3 5$

c) $2\log x - \frac{1}{2}\log(x-2)$

d) $3(\ln x + \ln y - 2\ln 5)$

TIP bij oefening 3 en 4: Bestudeer de definitie, voorbeelden + rekenregels voor logaritmen in module 2.1.11. Denk er bovendien aan dat:

$$a^{\log_a x} = x, \ \log_a(a^x) = x \ \text{ EN } \ a^{n \cdot \log_a x} = x^n$$

5. Voor welke reële x'en kan je de volgende y-waardes berekenen?

a) $y = \sqrt{\log(-3x+4)}$

b) $y = \ln\left(\frac{5-2x}{-3x-1}\right)$

6. Los op naar x :

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

c) $\log_x \sqrt[5]{9} = \frac{2}{5}$

d) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 36 = 0$

e) $(\log x)^2 + 2\log x + 1 = 0$

f) $3^{x^2-3x+2} < 729$

TIP bij oefening 6: Denk bij vraag a, b en c aan de betekenis (definitie) van een logaritme. Bij vraag d en e zou je de structuur van een tweedegraadsvergelijking moeten herkennen (doe een gepaste substitutie). En bij vraag f kan je 729 schrijven als een macht van 3 (welke?) om de ongelijkheid verder op te lossen naar x.

7. De pH van een stof is een maat voor de zuurtegraad ervan en wordt gevonden met de formule $\mathrm{pH} = -\log[H^+]$.

a) Wat is de pH (op 0,1 nauwkeurig) van zeewater waarvoor $[H^+] = 4{,}35 \cdot 10^{-9}$?

b) In een advertentie voor een shampoo wordt gezegd dat de pH gelijk is aan 7. Wat is dan $[H^+]$?

8. De geluidsintensiteit is gelijk aan de energie van de geluidsdrukgolven en wordt uitgedrukt in watt per vierkante meter (W/m^2). De standaardgeluidsintensiteit I_0 werd vastgesteld op 10^{-12} W/m^2 en komt overeen met de geluidsintensiteit net beneden de gehoordrempel.

   Om de geluidsintensiteitsschaal hanteerbaar te maken, wordt gebruik gemaakt van de decibelschaal. Dat is een relatieve schaal waarvoor geldt: $D = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

   Daarbij is D het aantal decibel, I de geluidsintensiteit en I_0 de standaardgeluidsintensiteit.

   a) Bepaal de geluidsintensiteit in decibel van
      - gefluister, $I = 10^{-9}$ W/m^2;
      - een levendig gesprek, $I = 3{,}16 \cdot 10^{-6}$ W/m^2;
      - een rockconcert, $I = 5{,}23 \cdot 10^{-2}$ W/m^2.

   b) Welke geluidsintensiteit (in dB) veroorzaken 10 auto's als 1 auto een geluidsintensiteit van 60 dB heeft?

9. Teken op de goniometrische cirkel de beeldpunten van alle hoeken α waarvoor cos(α) = 0,8. Bereken ook sin(α) en tg(α) zonder hulp van je rekentoestel.

10. Voor een hoek α uit het tweede kwadrant is sin(α) = 0,8. Bereken op basis van deze info cos(α) en tg(α) zonder hulp van je rekentoestel.

11. Voor een hoek α uit het vierde kwadrant is tg(α) = -2. Bereken op basis van deze info cos(α) en sin(α) zonder hulp van je rekentoestel.

TIP bij oefening 9, 10 en 11: Bestudeer de figuren in verband met de goniometrische cirkel die bijeengezet staan in module 3.1.7. Ook de grondformules die opgesomd staan in module 3.1.10 kunnen helpen!

12. Bepaal de voorwaarden waaraan een reële constante r moet voldoen opdat :

a) $\sin(\alpha) = \frac{r-1}{2}$ en $\cos(\alpha) = \frac{r+1}{2}$.

b) $\sin(\alpha) = \frac{r-2}{8-r}$.

TIP bij oefening 12: Denk aan de beperking die er is waaraan de uitkomst van de sinus of de cosinus van een hoek steeds moet voldoen (zie module 3.1.7). Wat betekent dit dan voor r ?

13. Vereenvoudig zo ver als mogelijk :

a) $\cos(\alpha + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi) + \cos(\alpha + 2\pi)$.

b) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

14. Herwerk beide kanten van volgende gelijkheden om zo aan te tonen dat de formule in zijn geheel klopt :

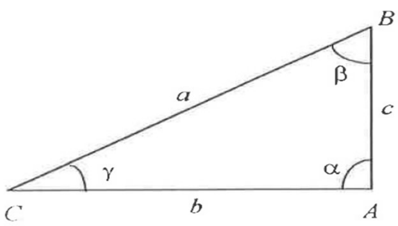
a) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}$

b) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\cos(2\alpha)}{1-\sin(2\alpha)}$

c) $(1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = \sin(2\alpha)$

TIP bij oefening 13 en 14: Maak gebruik van de goniometrische formules in module 3.1.10. Deze moet je NOOIT vanbuiten leren!

15. Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC (α = 90°). Bereken in de onderstaande tabel de ontbrekende zijden en/of hoeken:



	a	*b*	*c*	β	γ
a)	6	$3\sqrt{3}$			
b)		5/2	$5 \cdot \sqrt{3}/2$		
c)	20				45°
d)		6			30°

16. Drie steden X, Y en Z zijn zo gelegen dat in Y de wegen naar X en Z loodrecht op elkaar staan, en dat in X de wegen naar Y en naar Z een hoek maken van 64°30’. De wegen zijn recht en de steden Y en Z liggen 16,5 km van elkaar. Maak een schets van de situatie en los vervolgens op :
    a) Hoe snel moet een auto rijden, als men in 12 minuten van Y naar Z wil rijden?
    b) Hoe ver ligt X van Y ?
    c) Welke hoek vormen de wegen in Z ?

TIP bij oefening 15 en 16: Bestudeer de voorbeelden en nuttige formules voor het oplossen van rechthoekige driehoeken in module 3.1.5. Wat is bovendien het verband tussen snelheid, afgelegde weg en de tijd die daarbij verstreken is ?

17. Een cirkel heeft een straal van 9,4 meter. Bereken de lengte van de koorde die staat op een middelpuntshoek van 72°.

18. Twee krachten F en G grijpen aan in eenzelfde punt en werken onder een hoek van 35°10’. Als F = 12N en G = 5N, bereken dan :
    a) de grootte van de resultante R.
    b) de hoek tussen F en R.

TIP bij oefening 17 en 18: Bestudeer de voorbeelden en nuttige formules voor het oplossen van willekeurige driehoeken in module 3.1.6. Bij oefening 17 zal het tevens een kwestie zijn om een gepast stappenplan uit te stippelen om zo de gevraagde afstand en hoek in de “krachten-parallellogram” te vinden.

19. Voor welke reële x’en kan je de volgende y-waardes berekenen?
    a) $y = \text{Bgsin}(-2x+5)$
    b) $y = \text{Bgcos}(3x-7)$

20. Toon aan : $\text{Bgtg}\frac{1}{2} + \text{Bgtg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

TIP bij oefening 20: Bereken van zowel linkerlid als rechterlid de tangens. Toon dan aan met de somformule van tangens (zie module 3.1.10) dat de tangens van het linkerlid exact gelijk zal zijn aan de tangens van pi/4. In module 2.1.13 vind je meer uitleg over de betekenis van de Boogtangens-functie die in de MOOC als “Arctan” wordt genoteerd.

21. Los de volgende vergelijking op (zonder gebruik te maken van je rekentoestel) :

$$\text{Bgsin}(x) = \text{Bgsin}\frac{12}{13} + \text{Bgsin}\frac{4}{5}.$$

TIP bij oefening 21: Zelfde soort strategie, maar bereken nu van zowel linkerlid als rechterlid de sinus en denk ook aan de grondformule van de goniometrie.

22. Herschrijf de volgende functie als een breukfunctie (= rationale functie):

$$f(x) = \sin(2\,\text{Bgcotg}(x)).$$

TIP bij oefening 22: Stel Bgcotg(x) = α en doe vervolgens een beroep op zowel de sinus-formule voor een dubbele hoek als op een grondformule van de goniometrie (zie module 3.1.10). Hierbij is wel enige creativiteit nodig wat heel belangrijk is voor een (industrieel) ingenieur in spe!

BEKNOPTE OPLOSSINGEN

1. a) -25 ; b) $2 \cdot 10^6$; c) $-1/2$; d) $25/9$; e) 3 ; f) 3
2. a) $2/a^3$; b) a^6b^2 ; c) a^2 ; d) ab^2
3. a) $1/2$; b) $7/4$; c) $-1/2$; d) 100 ; e) 8 ; f) 8 ; g) -8 ; h) $2/27$
4. a) $\log 28$; b) $\log_3 2$; c) $\log\left(\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}\right)$; d) $\ln\left(\frac{x^3y^3}{25^3}\right)$
5. a) $x \leq 1$; b) $x \in \text{IR} \setminus \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right]$
6. a) $x = 9$; b) $x = 1/2$; c) $x = 3$; d) $x = \log_2 6$; e) $x = 1/10$; f) $-1 < x < 4$
7. a) pH = 8,4 ; b) $[H^+] = 10^{-7}$
8. a) 30 dB, 65 dB, 107.2 dB ; b) 70 dB

9. $\sin\alpha = \pm 0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm 0{,}75$

10. $\cos\alpha = -0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha = -4/3$

11. $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$; $\sin\alpha = -2/\sqrt{5}$

12. a) $-1 \leq r \leq 1$; b) $r \leq 5$

13. a) $\sin\alpha - \cos\alpha$; b) 1

14. /

15. a) $c = 3,\ \beta = 60°,\ \gamma = 30°$; b) $a = 5,\ \beta = 30°,\ \gamma = 60°$

c) $b = 10\sqrt{2},\ c = 10\sqrt{2},\ \beta = 45°$; d) $a = 4\sqrt{3},\ c = 2\sqrt{3},\ \beta = 60°$

16. a) 82,5 km/h ; b) 7,87 km ; c) de gevraagde hoek is $25°\,30'$

17. 11,05 meter

18. a) de grootte van R is 16,34 ; b) de gevraagde hoek is $10°\,8'\,56''$

19. a) $2 \leq x \leq 3$; b) $2 \leq x \leq \frac{8}{3}$

20. /

21. $x = 56/65$

22. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

SLOTOPMERKING: Je hebt misschien vastgesteld dat we geen oefeningen in deze sessie hebben opgenomen over ontbinden in factoren, rationale functies, poolcoördinaten + complexe getallen en limieten. Al deze topics die ook beschreven staan in de eerste 3 modules van de MOOC zullen we in Diepenbeek vooral met de hulp van het symbolisch rekentoestel aanpakken. Wanneer we deze begrippen nodig hebben in de wiskunde / mechanica / elektriciteit / … zullen we tijdens het academiejaar hier de nodige uitleg bij geven. Hier moet je je dus geen zorgen over maken!