

Goniometrische functies



Machteld Verhenne

Goniometrische functies

Inleiding

Op 9 maart 2025 zond VRT een aflevering van de documentaire reeks Dierendokters 24/7 aan de faculteit Dierengeneeskunde van UGent:

Hengst Stand-up wordt geopereerd om hem van zijn hartritmestoornis te verlossen. Professor Van Loon en zijn team hebben met de ingreep al veel paarden kunnen helpen, maar dit keer gaat het niet zoals verwacht. Het paard krijgt een elektroshock toegediend maar het team dierenartsen is niet tevreden: er komt op het cardiogram geen mooie sinusvorm tevoorschijn.



In deze cursus bekijken we wat we verstaan onder een sinusvorm, hoe deze is opgebouwd en welke fenomenen zich als een sinusvorm gedragen.

Hoofdstuk 1: Booglengte

1.1 Omtrek van een cirkel

1. Op een blik gepelde tomaten van 400 gram hangt een papieren wikkel. Als de straal van het blik 3,7 cm is, hoe lang moet dan dit papieren wikkel zijn?



2. Victor wil aan zijn vader een fles wijn cadeau doen. Hij heeft geen inpakpapier maar wel nog een lintje. Hoe lang moet dat lintje zijn als de diameter van de fles 7,5 cm is en hij 10 cm moet rekenen om een strik te maken?
3. Sasha wil een wikkelrok maken. De lendenomtrek is 90 cm. Hoe breed moet ze de stof nemen als de wikkelrok anderhalf keer om haar lenden zal zitten? Ze moet ook 8 cm stof rekenen voor de naden.

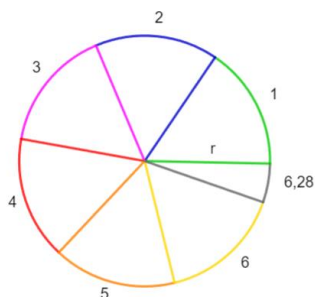


4. Noor wil een vijver in de vorm van een cirkel in haar tuin. Die wil ze omheinen met een veiligheidsdraad. Ze heeft nog 10 m draad. Hoe groot mag de straal van deze vijver zijn?

1.2 Radialen

De omtrek van een cirkel is $2\pi r$ met r de straal van de cirkel en $\pi = 3,14 \dots$ ¹

Dit betekent dat de omtrek gelijk is aan ongeveer 6,28 maal de straal want $2\pi \approx 2 \cdot 3,14 \approx 6,28$.



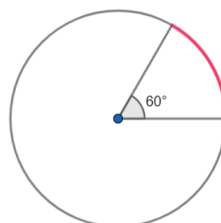
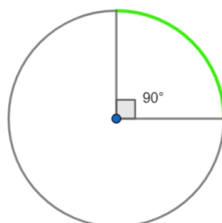
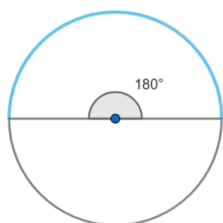
We zeggen ook dat de **lengte** van de cirkel gelijk is aan $6,28 \cdot$ straal.

Een halve cirkel is een boog die de helft van de cirkel is.

De lengte van deze halve cirkel is $\frac{1}{2} 2\pi r = \pi r (\approx 3,14 \cdot r)$

De halve cirkel staat op een boog van 180° . Dat is de helft van 360° : $180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$ of $\frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$

De booglengte van een halve cirkel is $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r \approx 3,14 r$



Met een kwartcirkel komt een boog van 90° overeen: $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$

De booglengte van een kwartcirkel is $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{\pi}{2} r \approx 1,57 r$

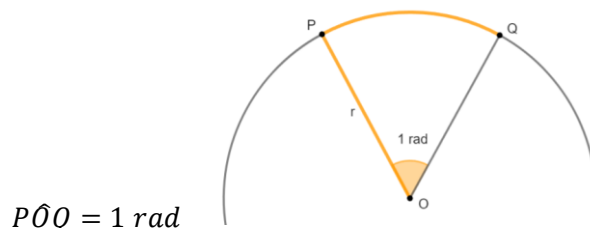
Met een boog van 60° komt een zesde van een cirkel overeen: $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$

De booglengte van een zesde van een cirkel is $\frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{\pi}{3} r \approx 1,05 r$

Het aantal keer dat de straal r in een booglengte past noemen we de **radiaal**² bij deze booglengte.

De radiaal is dus een reëel getal.

Als de straal precies één keer in de booglengte past, dan definiëren we de **middelpuntshoek** van deze booglengte ook als de radiaal.



¹ Het getal π komt van het Griekse alfabet. Pi staat voor de letter p. Pi is de afkorting van perimeter, het Griekse woord voor omtrek.

² Radiaal of hoekstraal. Radiaal is nog herkenbaar in het woord radar. Het symbool voor de straal is r .

Een hoek van 2π radialen komt overeen met 360°

Een hoek van π radialen komt overeen met 180° .

Een hoek van 180° komt overeen met π rad.

Een hoek van 1 radiaal komt overeen met $\frac{180^\circ}{\pi}$

Een hoek van 1° komt overeen met $\frac{\pi}{180}$ rad.

Een hoek van x radialen komt overeen met $\frac{180^\circ}{\pi} x$

Een hoek van y° komt overeen met $\frac{\pi}{180} y$ rad.

Een **booglengte** (dus een deel van de omtrek) van een cirkel is de **hoek in radialen maal de straal**.

$$\text{Booglengte} = \alpha \cdot r, \text{ met } \alpha \text{ in radialen}$$

5. Schrijf de volgende hoeken in radialen:

a) 45°

d) 70°

b) 270°

e) 110°

c) 30°

f) 200°

6. Schrijf de volgende hoeken in graden:

a) $\frac{2}{3}\pi$

d) 1

b) $\frac{\pi}{12}$

e) 2,5

c) $\frac{3\pi}{2}$

f) 6

7. Geef de booglengte bij de volgende gegeven straal r en middelpuntshoek α .

a) $r = 5$ cm en $\alpha = 2$

b) $r = 8$ cm en $\alpha = \frac{\pi}{5}$

c) $r = 12$ m en $\alpha = 20^\circ$

d) $r = 22$ cm en $\alpha = 65^\circ$

e) $r = 17$ m en $\alpha = 102^\circ$

8. Bereken de volgende goniometrische waarden, waarbij de hoek in radialen staat:

a) $\sin 1$

b) $\cos 0,5$

c) $\tan 7$

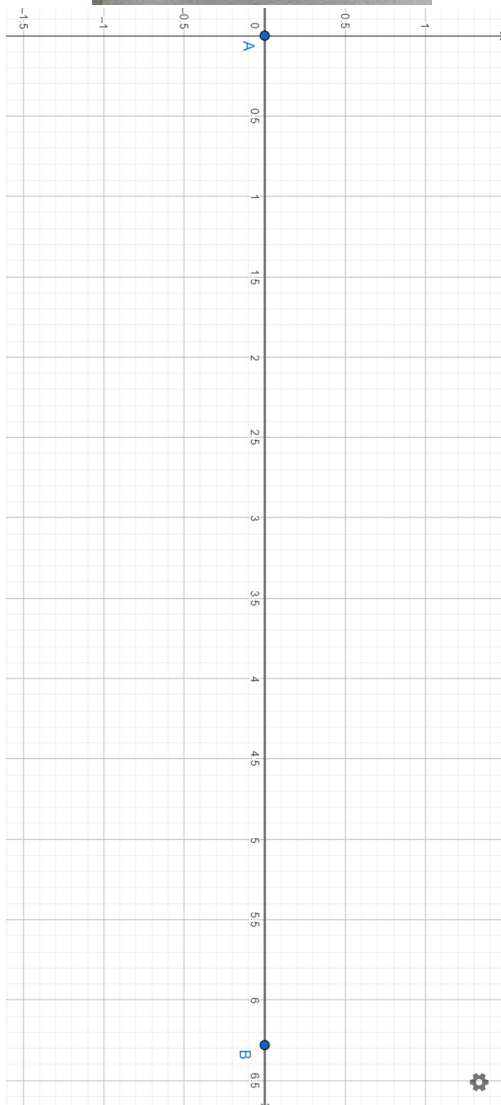
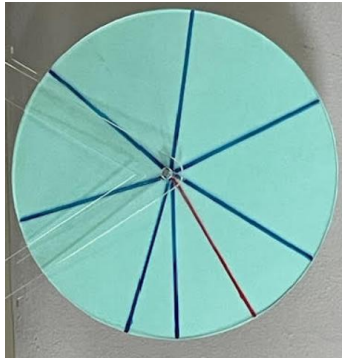
d) $\sin \frac{\pi}{6}$

e) $\sin \frac{5\pi}{6}$

Hoofdstuk 2: De sinusfunctie

2.1 Een kevertje stapt op het wiel

10. Een wiel met straal 1 dm staat op een statief. Een kevertje stapt over de omtrek van dit wiel aan een snelheid van 1 dm per minuut en start bij het punt A. Dit kevertje stapt tegen de richting van de wijzers van een klok, in **tegenwijzerszin** dus. *Draai dit blad om de figuur te tekenen:*



We bekijken hoe hoog dit kevertje zich bevindt. We nemen de horizontale lijn door het middelpunt van het wiel als **referentiehoogte**.

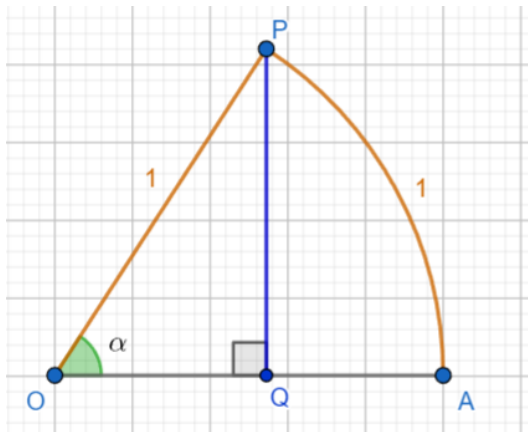
We willen nagaan hoe hoog het kevertje t.o.v. deze horizontale referentie geklommen is nadat het een afstand van 1 dm heeft afgelegd.

We zetten deze hoogtes uit in functie van de afgelegde afstand op de omtrek. 1 dm op de omtrek van het wiel komt overeen met een tijd van 1 minuut en ook met een hoek van 1 radiaal.

a) Duid deze hoek aan op de tekening en duid ook de hoogte op afstand 1 ($x = 1$) aan op de grafiek.

b) De hoogte kunnen we berekenen door driehoeksmetkunde.

Na 1 minuut is de kever van punt A naar punt P gekropen.



De hoogte t.o.v. de referentiehoogte is gelijk aan de afstand van P tot Q .

$|PQ|$ is de overstaande zijde van de **hoek α** in O in de rechthoekige driehoek OQP .

Omdat de booglengte 1 keer de straal 1 is, geldt: $\alpha = 1$

$$\sin 1 = \frac{|PQ|}{|OP|}$$

$$\Downarrow \quad |OP| = 1$$

$$\sin 1 = \frac{|PQ|}{1}$$

$$\Downarrow$$

$$|PQ| = \sin 1$$

Met het rekenmachine vinden we: de hoogte nadat de kever 1 minuut gestapt heeft is 0,84 dm.

Stemt dit overeen met de hoogte die je op de grafiek aangeduid had?

c) Het hoogste punt dat de kever kan bereiken is 1 dm boven de referentierechte. Dat is wanneer hij een kwartcirkel gestapt heeft. Dat komt overeen met een hoek van 90° of $\frac{\pi}{2}$.

$\frac{\pi}{2} = 1,57$. Duid dit hoogste punt aan op de grafiek.

Als het kevertje terug op de referentierechte komt, dan heeft het een halve cirkel afgelegd, dus een afstand van π dm. Duid dit punt aan op de grafiek.

Het laagste punt dat de kever kan bereiken is 1 dm onder de referentierechte. Dat is wanneer hij een drie kwartcirkel gestapt heeft. Dat komt overeen met een hoek van 270° of $\frac{3\pi}{2}$.

$\frac{3\pi}{2} = 4,71$. Duid dit laagste punt aan op de grafiek.

d) Als het kevertje nog maar 0,5 dm gestapt was, dan was de hoogte t.o.v. de referentiehoogte:

$$\sin 0,5 = 0,48$$

Duid dit aan op de grafiek.

Als het kevertje nog maar 0,25 dm gestapt was, dan was de hoogte t.o.v. de referentiehoogte:

$$\sin 0,25 = 0,247$$

Duid dit aan op de grafiek.

De **hoogte** van het kevertje **is gelijk aan de sinus van de hoek α** . Deze hoek is de hoek met het middelpunt als hoekpunt, het eerste been op de referentiehoogte en het tweede been door het punt waar de kever is.

De sinus van deze waarden zijn af te lezen door het punt op de omtrek te projecteren op de verticale as. We noemen daarom de y-as de **sinusas**.



Als de hoeken groter zijn dan een rechte hoek dan breiden we de definitie van de sinus van een hoek uit. De sinus van een hoek met het hoekpunt in het middelpunt van een cirkel met straal 1 is de loodrechte projectie van het punt op de omtrek van deze cirkel. Dit punt is het snijpunt van het tweede been van deze hoek waarvan het eerste been op de referentiehoogte ligt.

e) Bereken de volgende coördinaten van de posities van de kever en duid aan op de grafiek:

1) $(2, \sin 2)$

2) $(2,5; \sin 2,5)$

3) $(\pi, \sin \pi)$

4) $(4, \sin 4)$

5) $(5, \sin 5)$

6) $(6, \sin 6)$

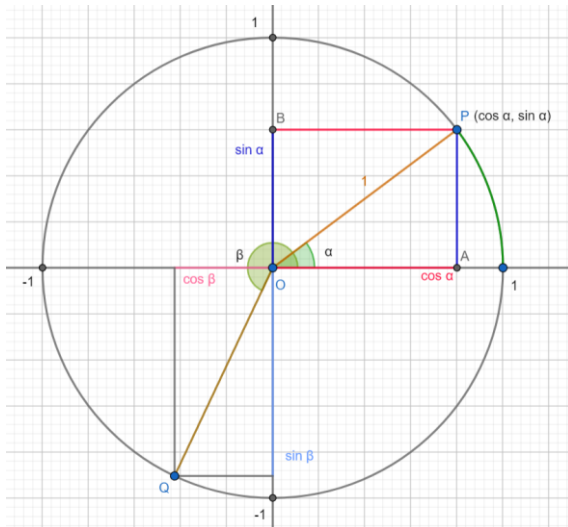
f) Het kevertje heeft een volledige cirkel gestapt na $2\pi = 6,28$ dm. Dat komt overeen met het punt B.

Duid dit punt aan op de grafiek.

2.2 De goniometrische cirkel

We tekenen een cirkel in het assenstelsel. Het middelpunt is $(0,0)$ en de straal 1.

We noemen deze cirkel de goniometrische cirkel omdat daarop gemakkelijk de goniometrische getallen af te lezen zijn.



Als we een hoek α in de oorsprong $O(0,0)$ leggen en het ene been laten samenvallen met de x-as, dan snijdt het andere been de cirkel in het punt P.

We tekenen de loodlijn door P loodrecht op de x-as. Het voetpunt is A. We bekommen dan een rechthoekige driehoek OAP. In deze $\triangle OPA$ geldt:

$$\sin \alpha = \frac{|AP|}{|OP|}$$

$$\Downarrow |OP| = 1$$

$$\sin \alpha = |AP|$$

$\Downarrow$ Deze afstand projecteren we op de y-as.

$$\sin \alpha = |OB|$$

De y-coördinaat van P is dus $\sin \alpha$ We noemen de y-as ook de **sinusas**.

$$\cos \alpha = \frac{|OA|}{|OP|}$$

$$\Downarrow |OP| = 1$$

$$\cos \alpha = |OA|$$

De x-coördinaat van P is dus $\cos \alpha$ We noemen de x-as ook de **cosinusas**.

$(\cos \alpha, \sin \alpha)$ zijn dus de coördinaten van het punt P

Ook als de hoek groter is dan een scherpe hoek, breiden we deze nieuwe definitie van sinus en cosinus van een hoek uit (zie figuur):

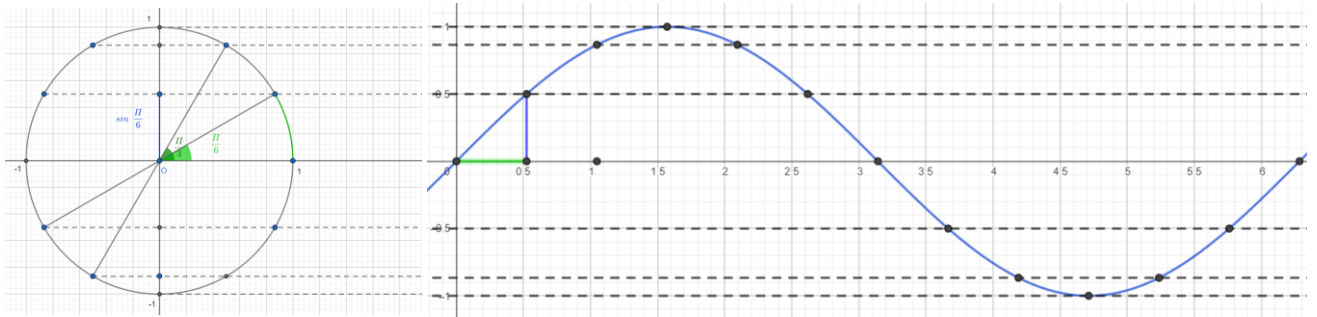
De projectie van het punt Q op de x-as is $\cos \beta$.

De projectie van het punt Q op de y-as is $\sin \beta$.

2.3 De elementaire sinusfunctie

We laten de hoek α in tegenwijzerszin draaien vanaf de positieve x-as.

Voor de hoeken $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$... nemen we het snijpunt van het tweede hoekbeen met de cirkel. Dat snijpunt projecteren we loodrecht op de y-as. Deze hoogtes op de y-as stellen dus de sinus van deze hoeken voor. Deze sinussen vormen dan de sinusfunctie $y = \sin x$



We kunnen de hoek verder laten draaien dan een volledige cirkel. Ook bij $7, 5\pi, 200$... bestaat de sinus. Als we vanuit de startpositie de hoek in wijzerszin laten draaien, dan spreken we van negatieve hoeken.

Ook voor negatieve waarden of hoeken bestaat de sinus.

Voor elk reëel getal kunnen we de sinuswaarde bepalen door de projectie van het snijpunt van het tweede been van deze hoek met de goniometrische cirkel te projecteren op de y-as. Deze waarden keren na een interval van 2π steeds terug. De sinusfunctie is dus een periodieke functie met **periode 2π** .

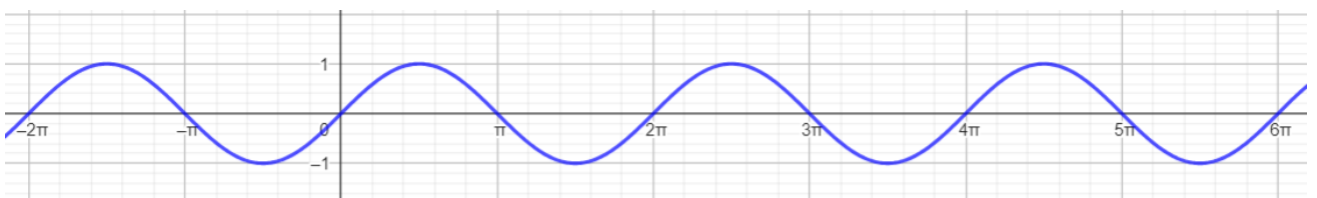
De hoogste waarde van $y = \sin x$ is 1, de kleinste waarde is -1. Alle andere waarden liggen daartussen.

De grafiek van de sinusfunctie snijdt de x-as (referentiehoogte) voor $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$... Dit zijn de nulwaarden van de sinusfunctie.

De x-as noemen we ook de **evenwichtstand**: er zijn evenveel waarden boven als onder de evenwichtstand.

De waarden schommelen op een symmetrische wijze rond deze evenwichtsstand.

De grootste uitwijking t.o.v. de evenwichtslijn noemen we de amplitude³. Deze is bij $y = \sin x$ gelijk aan 1.



Kenmerken van de sinusfunctie $f(x) = \sin x$

- Domein = $\mathbb{R}$
- Bereik = $[-1, 1]$
- Periode 2π
- Evenwichtstand: x-as met als vergelijking $y = 0$
- Amplitude 1
- Nulwaarden: $0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots -\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi \dots$

³ Amplitude komt van het Latijnse amplus dat wijd betekent.

Amplitude is ook een synoniem van slingerwijdte, bijvoorbeeld van een schommel.

11. Bepaal de volgende waarden:

a) $\sin 5\pi$

b) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

c) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

12. a) Geef een waarde groter dan 2π waarvan de sinus gelijk is aan -1.

b) Geef een waarde kleiner dan nul waarvan de sinus gelijk is aan 1.



Hoofdstuk 3: de algemene sinusfunctie

Heel veel periodieke functies zijn opgebouwd uit één of meerdere sinusfuncties.

We bekijken eerst de grafieken van de sinusfunctie waarop een transformatie⁴ is uitgevoerd.

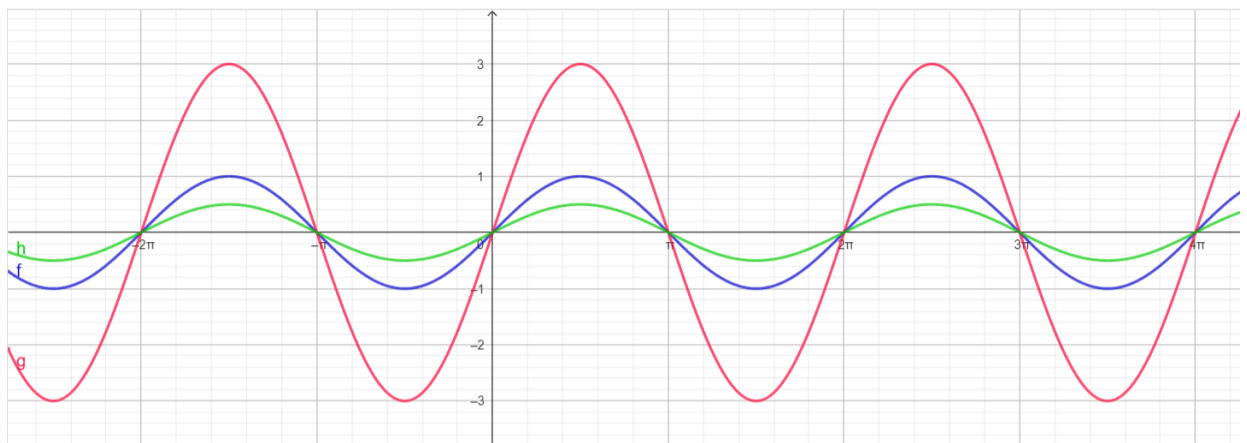
3.1 Grafiek van $y = a \sin x$ met $a > 0$

13. We tekenen de grafieken van de volgende functies:

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = 3 \sin x$$

$$h(x) = \frac{1}{2} \sin x$$



a) Bereken de amplitude van deze drie grafieken.

b) Wat is het bereik van f , g en h ?

Als we de grafiek van $y = \sin x$ **verticaal**⁵ **uitrekken met een factor a** , dan bekomen we de grafiek van **$y = a \sin x$** .
De **amplitude is a** en het bereik is $[-a, a]$.

14. Een wiel met straal 1 dm draait in tegenwijzerszin aan een snelheid van 1 dm per minuut rond. Op één van de spaken zit een spin, op 80 cm van de as van dit wiel. Bij de start bevindt de spin zich precies rechts van de as van dit wiel.

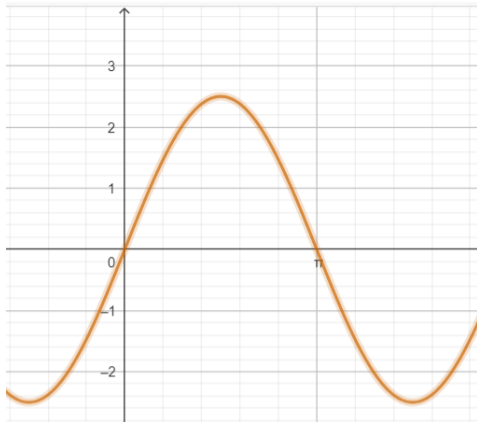
Geef het voorschrift van de hoogte waarop deze spin zich bevindt gedurende dat dit wiel draait.

⁴ Een transformatie betekent letterlijk omzetting, een transformatie kan ook op een verandering wijzen. Een wiskundige transformatie is een verschuiving, spiegeling, uitrekking

⁵ Verticaal is afkomstig van het Latijnse verticalis, dat afgeleid is van vertex wat hoogste punt betekent.

15. Geef het voorschrift van de volgende functies:

a) De grafiek van f staat hier getekend:



b) De functie g is een periodieke functie met periode 2π en met amplitude 4.

c) Het bereik van de functie h is $[-5, 5]$

16. Een wiel met straal 1 dm draait in wijzerszin aan een snelheid van 1 dm per minuut rond. Op één van de spaken zit een mier, op 50 cm van de as van dit wiel. Bij de start bevindt de mier zich precies links van de as van dit wiel.

Geef het voorschrift van de hoogte waarop deze mier zich bevindt gedurende dat dit wiel draait.

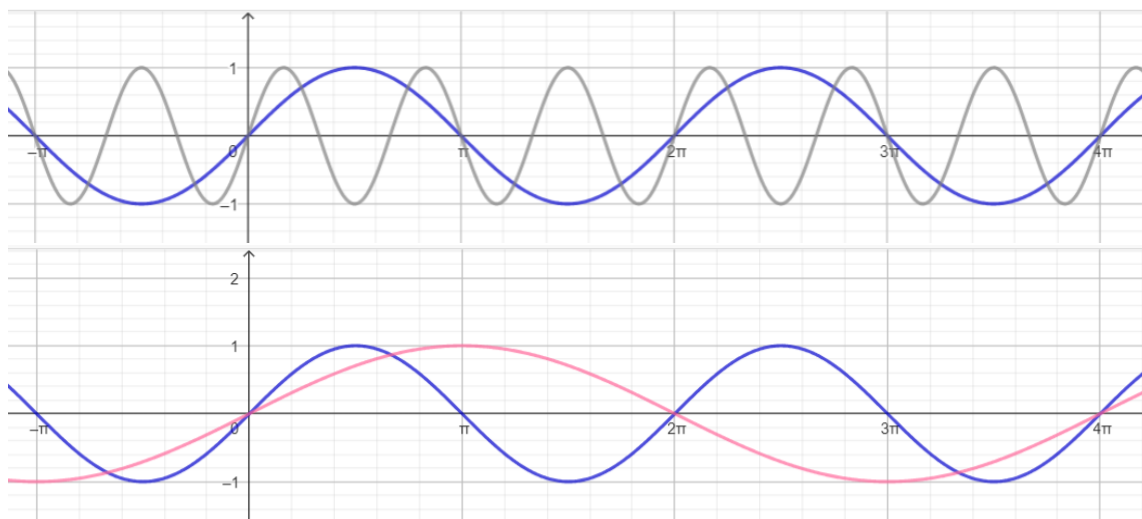
3.2 De grafiek $y = \sin bx$ met $b > 0$

18. We tekenen de grafieken van de volgende functies:

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \sin 3x$$

$$h(x) = \sin \frac{1}{2}x$$



a) Geef het aantal periodes dat de volgende functies hebben binnen het interval $[0, 2\pi]$

aantal periodes in $[0, 2\pi]$ van $f(x) = \sin x$:

$$g(x) = \sin 3x$$

$$h(x) = \sin \frac{1}{2}x$$

Geef de periode van de grafieken van deze functies:

periode van $f(x) = \sin x$:

periode van $g(x) = \sin 3x$

periode van $h(x) = \sin \frac{1}{2}x$

b) Welke grafiek is een horizontale ⁶ uitrekking t.o.v. de grafiek van $y = \sin x$?

Hoe vaak wordt deze uitgerokken?

Welke grafiek is een horizontale inkrimping t.o.v. de grafiek van $y = \sin x$?

Hoe vaak wordt deze samen geduwd?

Dit komt overeen met een horizontale uitrekking met factor _____

De grafiek $y = \sin 2x$ ontstaat uit de grafiek $y = \sin x$.

Als x vermenigvuldigd wordt met 2, dan hebben we een horizontale uitrekking langs de x -as met factor 2.

Dan nemen we de sinus van deze dubbele waarde $2x$. Het resultaat daarvan plaatsen we in de tabel onder de oorspronkelijke x -waarde. Door dit 'terug plaatsen' wordt de grafiek met factor 2 'ingeduwd'.

We hebben dus een horizontale uitrekking met factor $\frac{1}{2}$.

⁶ Horizontaal: volgens de richting van de horizon. Het Griekse *horizōn* is afkomstig van *horos* = grens.

De horizon is de grens of eindpunt tot waar we kunnen zien. Een oud synoniem voor horizon is *gezichtseinder*.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,71	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,87	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,87	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,71	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ = -0,71	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ = -0,87	-1
$2x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	2π				
$y = \sin 2x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,87	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,87	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ = -0,87	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ = -0,87	0				

De grafiek $y = \sin bx$ heeft een **periode** $\frac{2\pi}{b}$.

De grafiek $y = \sin x$ wordt **horizontaal met factor** $\frac{1}{b}$ uitgerokken om de grafiek van $y = \sin bx$ te bekomen.

19. Geef de periode van de functies met als grafiek:

a) $y = \sin 4x$

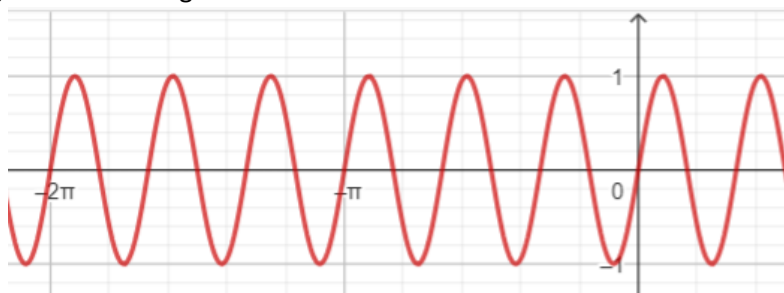
b) $y = \sin \pi x$

c) $y = 1,5 \sin \frac{\pi}{2}x$

20. Geef het voorschrift van de volgende sinusfuncties:

a) De grafiek wordt horizontaal uitgerokken met factor $\frac{1}{5}$

b) De grafiek is hier afgebeeld:



c) De kever stapt anderhalf keer zo vlug over de omtrek van het rad en we nemen als x-as de tijdas.

d) De periode is 5π en de amplitude is 7.

e) De periode is 1.

f) De periode is 3 en de amplitude is 2,5.

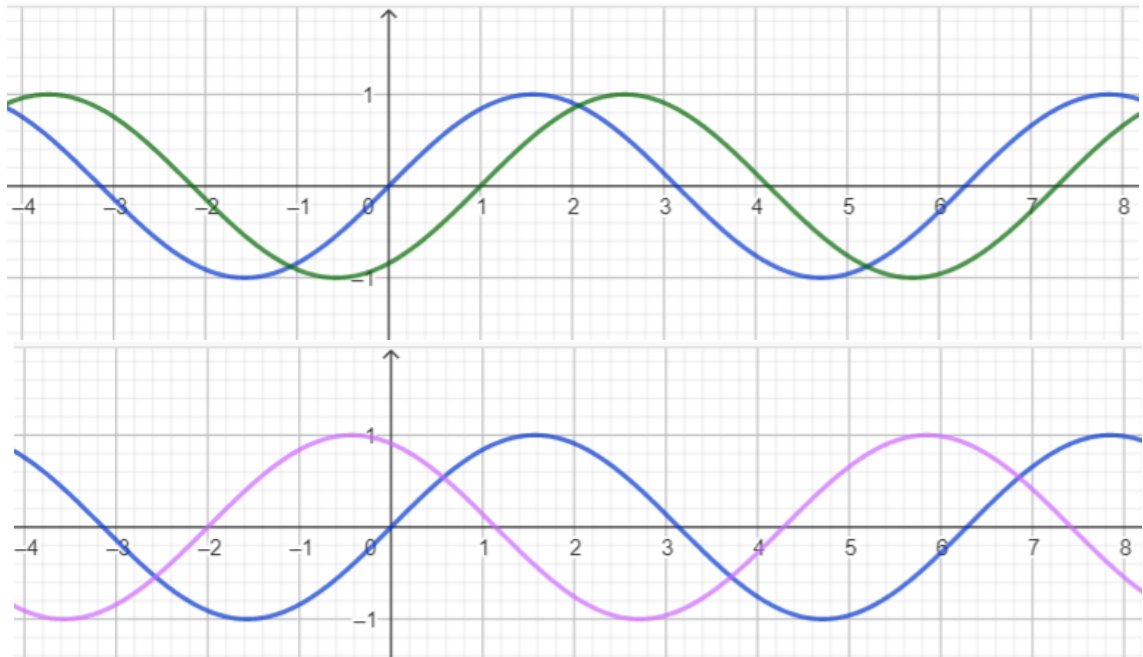
3.3 De grafiek $y = \sin(x - c)$

21. We tekenen de grafieken van de volgende functies:

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \sin(x - 1)$$

$$h(x) = \sin(x + 2)$$



Het 'startpunt' van de periode van $y = \sin x$ is $(0,0)$. Dat punt ligt op de evenwichtslijn en van daaruit stijgt de grafiek.

a) Wat is de startwaarde van $y = \sin(x - 1)$ en van $y = \sin(x + 2)$?

b) De grafieken $y = \sin(x - 1)$ en $y = \sin(x + 2)$ zijn horizontaal verschoven t.o.v. de grafiek $y = \sin x$.

Ligt de grafiek van $y = \sin(x - 1)$ links of rechts t.o.v. de grafiek $y = \sin x$?

En hoeveel is de grafiek van $y = \sin(x - 1)$ verschoven?

Ligt de grafiek van $y = \sin(x + 2)$ links of rechts t.o.v. de grafiek $y = \sin x$?

En hoeveel is de grafiek van $y = \sin(x + 2)$ verschoven?

De grafiek $y = \sin(x + 1)$ ontstaat uit de grafiek $y = \sin x$.

Als x opgeteld wordt met 1, dan hebben we langs de x -as een verschuiving van 1.

Dan nemen we de sinus van deze som $(x + 1)$. Het resultaat daarvan plaatsen we in de tabel onder de oorspronkelijke x -waarde. Door dit 'terug plaatsen' wordt de grafiek met 1 naar links verschoven, want de sinuswaarde die onder $x + 1$ staat wordt terug 1 plaats naar links geplaatst.

We hebben dus een horizontale verplaatsing van 1 naar links.

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = \sin x$	0	0,84	0,91	0,14	-0,76	-0,96	-0,28
$x + 1$	1	2	3	4	5	6	7
$y = \sin(x + 1)$	0,84	0,91	0,14	-0,76	-0,96	-0,28	0,66

Als we de grafiek $y = \sin x$ horizontaal verschuiven over een afstand $|c|$ ($|c|$ is steeds een positief getal), dan bekomen we de grafiek $y = \sin(x - c)$

Als $c > 0$ dan is de verschuiving naar **rechts**.

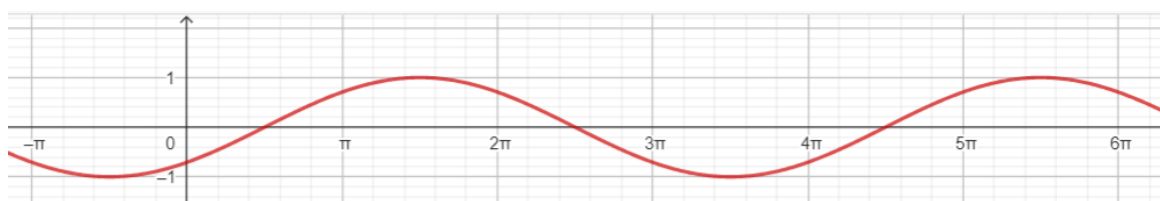
Als $c < 0$ dan is de verschuiving naar **links**.

Het **startpunt** van een periode van $y = \sin(x - c)$ is $(c, 0)$.

Twee horizontale transformaties

In de horizontale richting hebben we nu al twee transformaties: een uitrekking en een verschuiving. Wat gebeurt er als beide transformaties op de grafiek worden toegepast?

Bijvoorbeeld: Dit is de grafiek van $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$



De periode van deze sinusfunctie is 4π . Dit stemt overeen met de formule $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

Het startpunt van een periode is $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$x - \frac{\pi}{2}$ staat tussen haakjes omdat $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(0) = 0$.

Voor $x = \frac{\pi}{2}$ snijdt de grafiek de evenwichtslijn: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ is het startpunt van een periode.

De horizontale uitrekking is er één die vertrekt vanuit de y-as: $x = 0$. Hoe verder de punten van de y-as verwijderd zijn, hoe meer ze worden uitgerokken. We voeren dus eerst deze horizontale uitrekking uit met factor $\frac{1}{b} = 2$ en dan pas een verschuiving van het startpunt met $\frac{\pi}{2}$ naar rechts.

Als we eerst een verschuiving van het startpunt met $\frac{\pi}{2}$ zouden doen en dan een horizontale uitrekking met factor 2, dan zou dit startpunt ook uitgerokken worden, want het ligt niet op de y-as.

Dat startpunt zou dan op $(\pi, 0)$ liggen want $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

$$f(x) = \sin(x)$$

⇓ horizontale uitrekking met factor 2, periode wordt 4π

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

⇓ horizontale verschuiving van $\frac{\pi}{2}$ naar rechts

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

22. Geef het voorschrift van de volgende sinusfuncties:

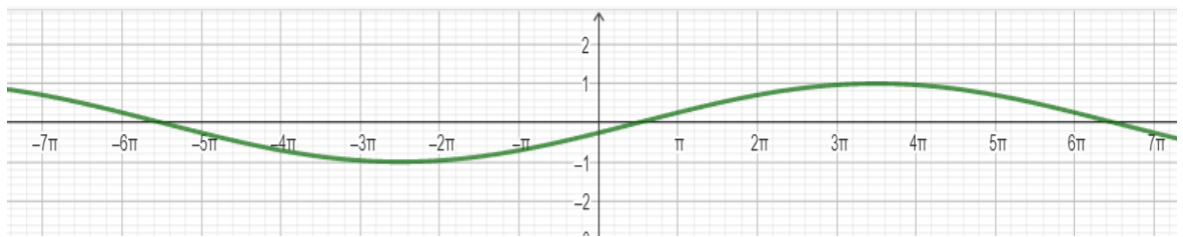
a) de grafiek $y = \sin x$ wordt 3 naar rechts verschoven.

b) de grafiek heeft als amplitude 2,4 en een periode start in $(5,0)$.

c) de grafiek $y = \sin x$ is horizontaal uitgerokken met een factor 4 en $\frac{\pi}{6}$ naar links verschoven.

d) de grafiek heeft 5π als periode en het startpunt van een periode is $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$

e) de grafiek is hier getekend:



f) de grafiek $y = \sin x$ is verticaal uitgerokken met factor 0,3 en horizontaal verschoven met $\frac{3}{2}$ naar rechts.

23. Een wiel met straal 1 dm draait in tegenwijzerszin aan een snelheid van 1 dm per minuut rond. Op één van de spaken zit een vlinder, op 90 cm van de as van dit wiel. Bij de start bevindt de vlinder zich precies onderaan t.o.v. de as van dit wiel.
Geef het voorschrift van de hoogte waarop deze vlinder zich bevindt gedurende dat dit wiel draait.

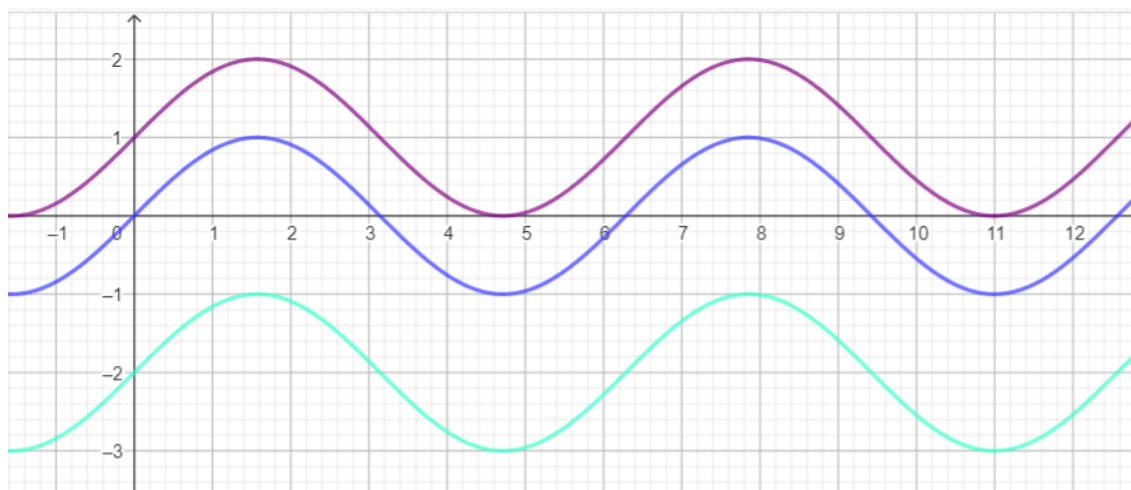
3.4 De grafiek $y = \sin x + d$

24. We tekenen de grafiek van de volgende functies:

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \sin x + 1$$

$$h(x) = \sin x - 2$$



- a) Geef de evenwichtslijn en startpunt van de grafieken $y = \sin x$
 $y = \sin x + 1$
 $y = \sin x - 2$
- b) Geef het bereik van $f(x) = \sin x$
 $g(x) = \sin x + 1$
 $h(x) = \sin x - 2$

Als we de grafiek $y = \sin x$ verticaal verschuiven over een afstand $|d|$, dan bekomen we de grafiek $y = \sin(x) + d$

Als $d > 0$ dan is de verschuiving naar **boven**.

Als $d < 0$ dan is de verschuiving naar **onder**.

Het **bereik** van $y = \sin(x) + d$ is $[d + 1, d - 1]$.

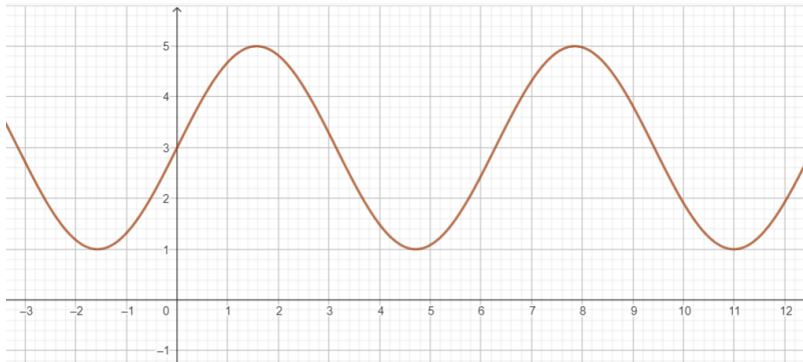
Het **startpunt** van een periode is $(0, d)$.

25. Geef het voorschrift van de volgende sinusfuncties :

a) Het bereik van de functie is $[-4, -2]$

b) Het startpunt van een periode is $(2, 3)$

c) De grafiek van de sinusfunctie staat hier getekend:



d) Het bereik van de functie is $[1, 5]$.

e) De periode is π en $y = 1$ is de evenwichtslijn.

f) de grafiek $y = \sin x$ wordt verticaal uitgerokken met factor 4, met 2 naar rechts verschoven en 1 naar boven geschoven.

g) de grafiek wordt horizontaal uitgerokken met factor 0,2 en het startpunt is $\left(-\frac{\pi}{5}, \pi\right)$

h) Een wiel met straal 1 dm draait in tegenwijzerszin aan een snelheid van 1 dm per minuut rond. Op één van de spaken zit een krekel, op 90 cm van de as van dit wiel. Bij de start bevindt de krekel zich precies onderaan t.o.v. de as van dit wiel. Het wiel wordt 25 cm naar boven verschoven.

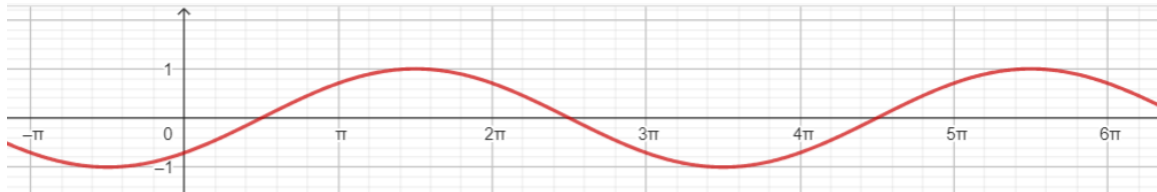
Geef het voorschrift van de hoogte waarop deze krekel zich bevindt gedurende dat dit wiel draait.

Twee verticale transformaties

In de verticale richting hebben we nu al twee transformaties: een uitrekking met een amplitudeverandering en een verschuiving.

Wat gebeurt er als beide transformaties op de grafiek worden toegepast?

Dit is de grafiek van $f(x) = 3 \sin x + 2$



De verticale uitrekking is er één die vertrekt vanuit de x-as: $y = 0$. Hoe verder de punten van de x-as verwijderd zijn, hoe meer ze worden uitgerokken. We voeren dus eerst deze verticale uitrekking uit met factor 3 en dan pas een verschuiving van 2 naar boven.

Als we eerst een verschuiving van 2 naar boven doen en dan een verticale uitrekking met factor 3, dan zou ook de evenwichtslijn verder weg van de x-as getransformeerd worden. We zouden dan de volgende effecten op de grafiek vaststellen:

$$y = \sin x$$

$$\Downarrow \quad 2 \text{ naar boven}$$

$$y = \sin x + 2$$

$$\Downarrow \quad \text{verticale uitrekking met factor 3}$$

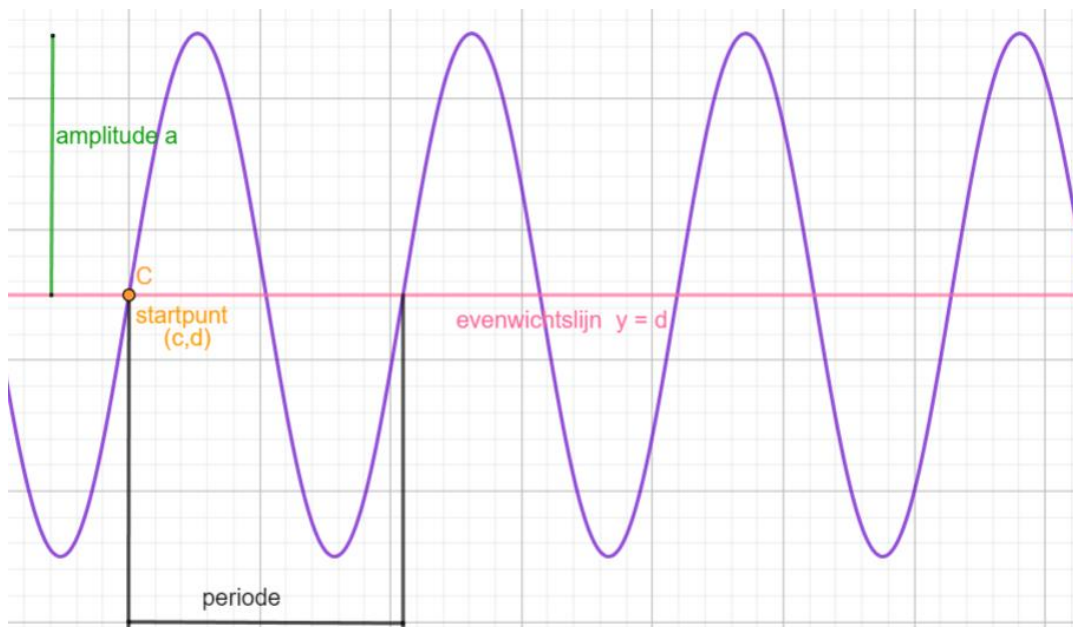
$$y = 3(\sin x + 2)$$

$$y = 3 \sin x + 6$$

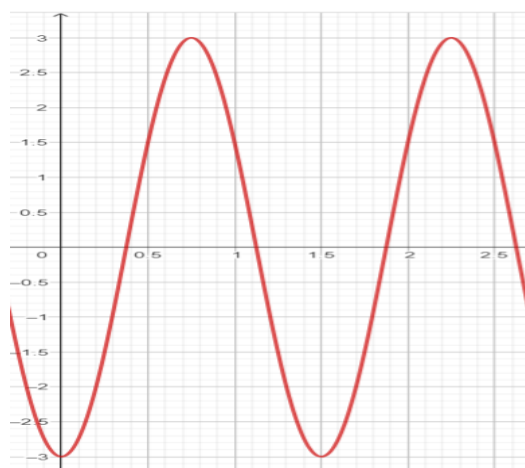
Dit komt overeen met een verticale uitrekking met factor 3 en een verschuiving van 6 naar boven.

Kenmerken van de sinusfunctie $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$

- Domein = $\mathbb{R}$
- Bereik = $[d - a, d + a]$
- Periode $\frac{2\pi}{b}$
- Evenwichtstand: x-as met als vergelijking $y = d$
- Amplitude a
- Startpunt van een periode: (c, d)



26. Linde hangt aan de springplank van het zwembad. Op tijdstip $t = 0$ laat Linde de springplank los en blijft de springplank natrillen (op de horizontale as staan de tijdstippen in seconden en op de verticale as de uitwijking van de plank in cm.)



- Bepaal de uitwijking na 0,3 s en na 1,5 s.
- Bepaal de amplitude
- Geef de vergelijking van de uitwijking van deze springplank.

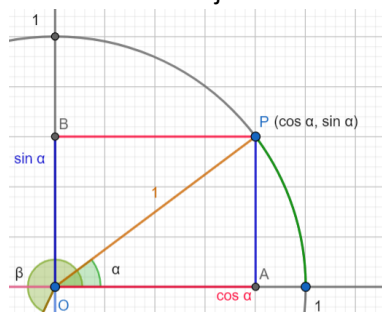
Herhalingsoefeningen

Booglengte

27. Met welke hoek in graden komt een hoek van 1 radiaal overeen?
28. Het voorwiel van Robbes fietsje reed door een plas water. Daardoor tekent dit wiel een vochtige lijn van 42 cm op de stoep. De diameter van het voorwiel is 28 cm.



- a) Hoeveel procent van de fietsband reed door het water?
- b) Hoe groot was de hoek waarover het fietswiel in het water reed?
29. We bekijken het eerste kwadrant⁷ van de goniometrische cirkel: Het eerste kwadrant is het vierde deel van het vlak waarbij de x-as en de y-as positief zijn.



In de rechthoekige driehoek OAP geldt de stelling van Pythagoras:

$$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2$$
$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$$

Vaak wordt dit korter geschreven als: $\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1}$

Dit wordt de grondformule van de goniometrie genoemd.

Vul op basis van de grondformule aan:

a) $\cos^2 \alpha = \dots$ b) $\sin^2 \alpha = \dots$

30. Op een spie van 40° van een cirkelvormig bloemenperkje met diameter 1,6 m wil je sneeuwkllokjes planten. Hoeveel knollen zijn er nodig als er 150 knollen per m² moeten gepland worden?



⁷ Kwadrant betekent het vierde deel en is afkomstig van het Latijnse quadratum wat vierkant betekent

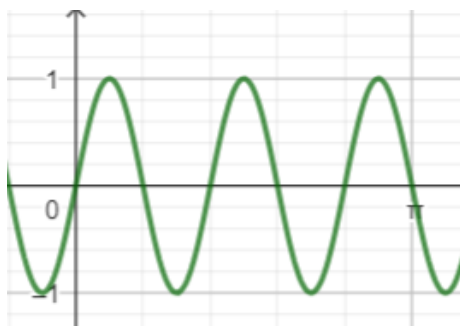
De algemene sinusfunctie

31. Geef de startwaarde bij de volgende algemene sinusfuncties:

- a) $f(x) = 2 + 4 \sin(x - 1)$
- b) $g(x) = 3 \sin(2x - 5) + 1$
- c) $h(x) = \sin(3x) \cdot (2 + 4)$
- d) $k(x) = 5(\sin(x - 1) - 7)$

32. Geef het voorschrift van de volgende functies:

- a) De grafiek van h is de gespiegelde grafiek van $y = \sin x$ om de x-as.
- b) De grafiek staat hier getekend

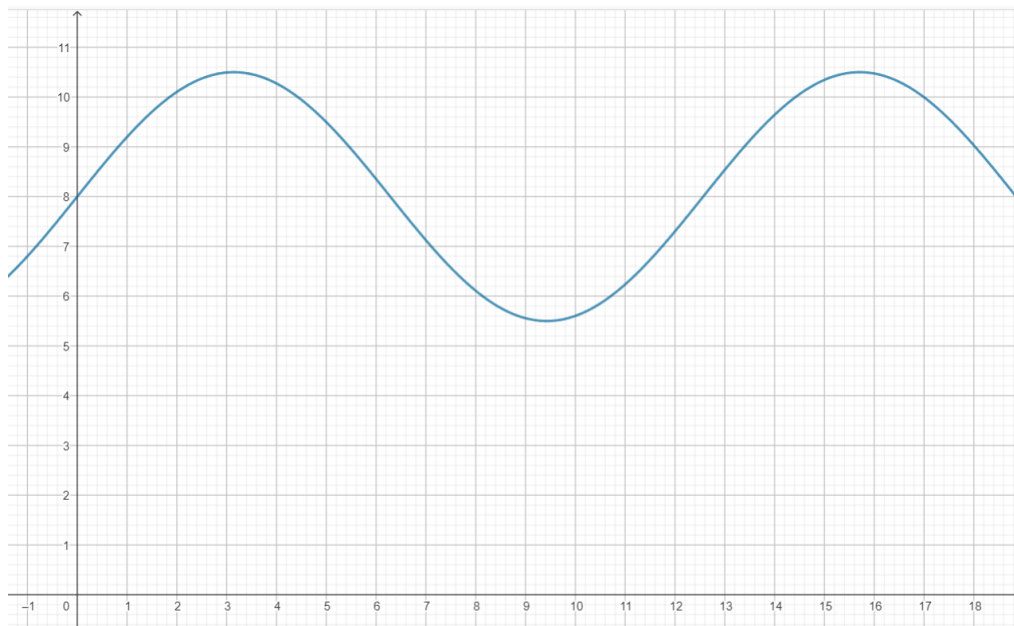


c) Een reuzenrad met straal 14 m draait in wijzerszin. Het rad is in twee minuten een volledige cirkel gedraaid. De as van het rad bevindt zich op 16,5 m en de gondels hangen 2 m lager dan hun ophangpunt.

Geef het functievoorschrift die de hoogte van Youssef bij één rondje weergeeft als hij in een gondel stapt wanneer deze volledig onderaan is.



33. Voor de scheepvaart is het heel belangrijk om de diepgang van de vaargeul naar een haven te weten. Door eb en vloed wisselt de diepgang in functie van de tijd. Voor de Antwerpse haven kan de diepte van deze vaargeul weergegeven worden door $y = 2,5 \sin \frac{t}{2} + 8$ (t in uren).



Een schip heeft onder het ruim nog water nodig om veilig te varen. Deze extra diepte is ongeveer 20% van de diepgang van dit schip.

a) Ga op basis van de grafiek na hoelang een schip met een diepgang van 7,5 m erover mag doen om de Antwerpse haven veilig binnen te varen.

b) Het schip van Sinterklaas heeft twee uren nodig om Antwerpen binnen te varen. Welke diepgang mag dit Spaans schip maximaal hebben?

34. Bij het inademen vergroot het volume van de longen, bij het uitademen verkleint dit volume. Een mens die stil zit heeft meestal genoeg aan 7 keer in- en uitademen per minuut. Als je inademt zit er gemiddeld nog 4,8 l lucht in je longen, als je uitademt nog 4,3 l.
Bepaal het voorschrift van de longinhoud van een persoon die rustig neerzit.

35. Het geluid is een trilling die zich door de lucht voorplant. We kunnen deze voorstellen door een sinusfunctie. Het aantal keer dat een periode in een seconde voorkomt noemen we de **frequentie**. De frequentie drukken we uit in **Herz (Hz)** $= \frac{1}{s}$. **Dat is een maat voor de toonhoogte.**

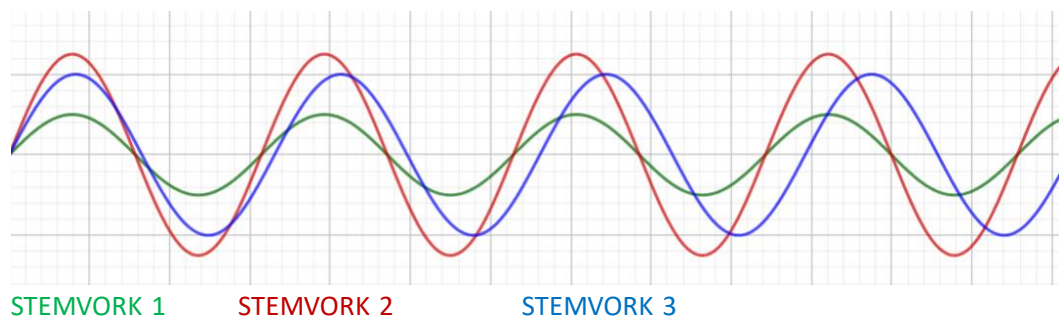
De periode van $y = \sin x$ is gelijk aan 2π . De frequentie is dan $\frac{1}{2\pi}$. Dit is 0,16 Hz

Het laagste dat onze oren kunnen horen is 20 Hz, terwijl de bovengrens voor hoge tonen rond de 20000 Hz ligt.

Als de amplitude van de geluidstrilling groter is, dan is het geluid sterker. De toonsterkte is groter.

- a) De frequentie van een stemvork is 440 Hz. Dat komt overeen met de la toon.

A) Welke stemvorken werd het hardst aangeslagen?



B) Orkesten tussen 1750 en 1820 gebruikten stemvorken van 423,5 Hz. Welke van de stemvorken is een antiek exemplaar en klinkt samen met de andere stemvorken een beetje vals?

- b) Waarom kunnen we het zoemend geluid van een mug horen en horen we van een vlinder of libelle niets?



- c) Je kan je GSM in tril- of belmodus zetten. Hier staan de voorschriften van drie 'eentonige' beltonen en een triltoon genoteerd.

$$f(x) = 1,4 \sin \left(30 \pi t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$g(x) = 0,7 \sin \left(3000 \pi t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$h(x) = 1,4 \sin (3000 \pi t + \pi)$$

$$j(x) = 0,7 \sin \left(300 \pi t + \frac{\pi}{4} \right)$$

A) Welke van de vier signalen is de triltoon?

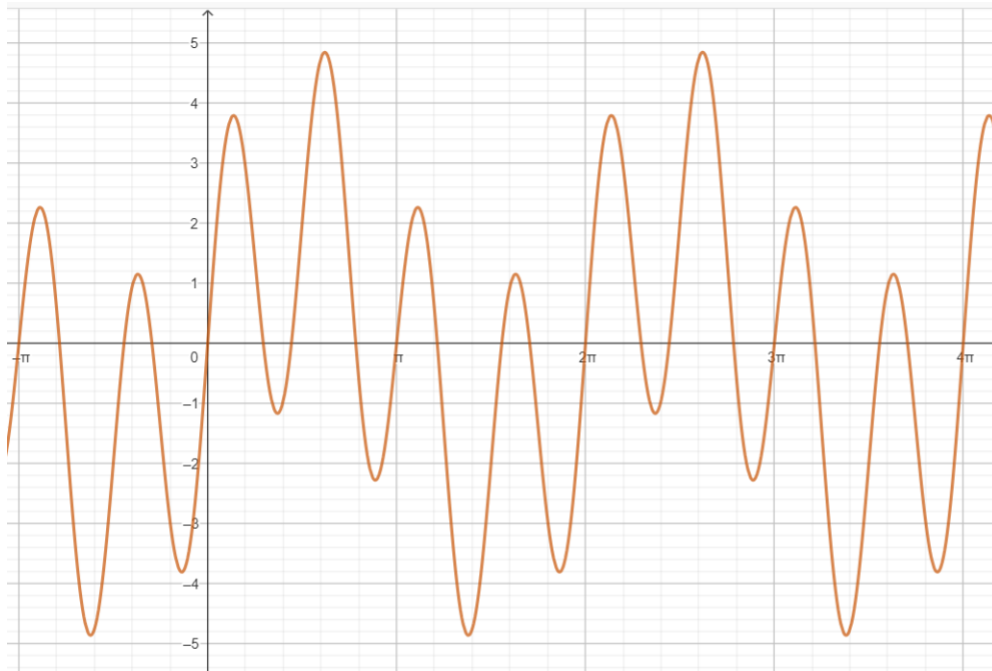
B) Rangschik de beltonen van hoge toon naar lage toon.

Rangschik de beltonen van stil naar luid.

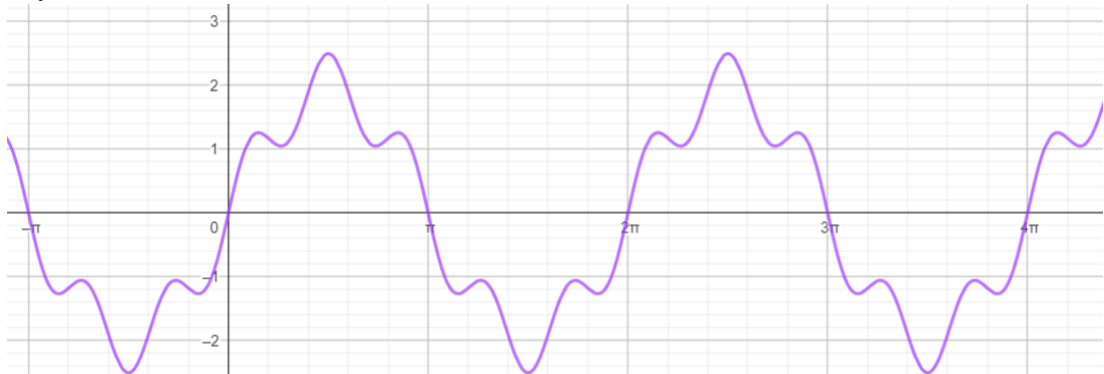
36. Een elektrische tandenborstel trilt 8000 keer per minuut. Bereken de periode.

37. Als er twee sinusfuncties worden opgeteld bekomen we terug een periodieke functie. Bepaal de periode van de volgende functies:

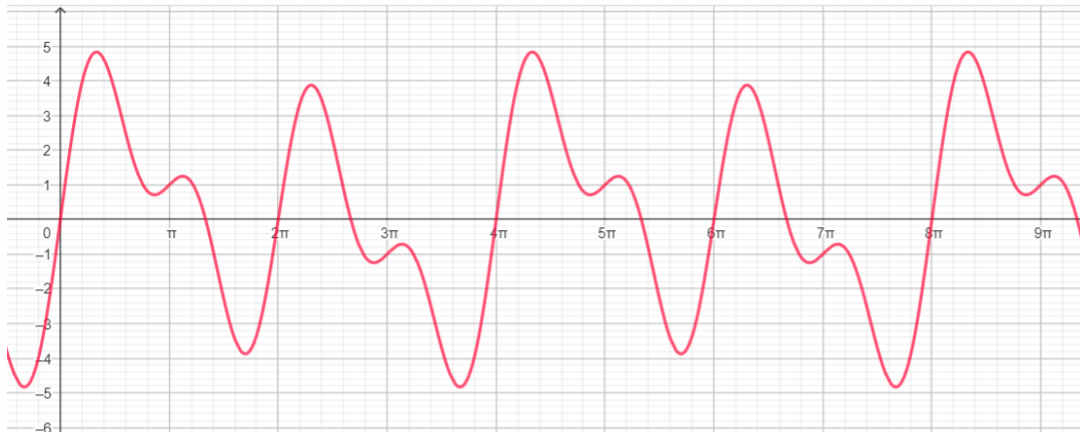
a) $f(x) = 2 \sin x + 3 \sin(4x)$



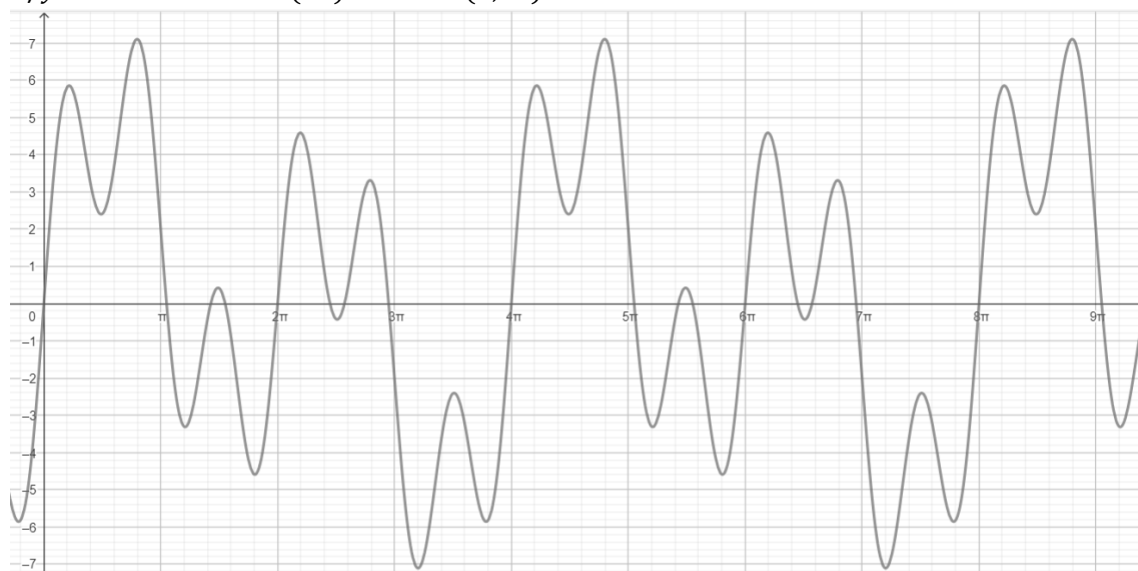
b) $y = 2 \sin x + 0,5 \sin 5x$



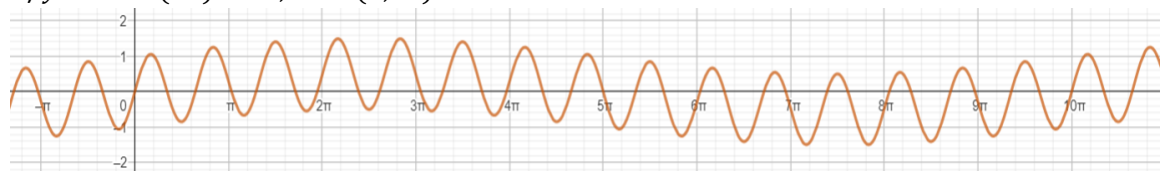
c) $y = 3 \sin x + 2 \sin 2x + \sin 0,5x$



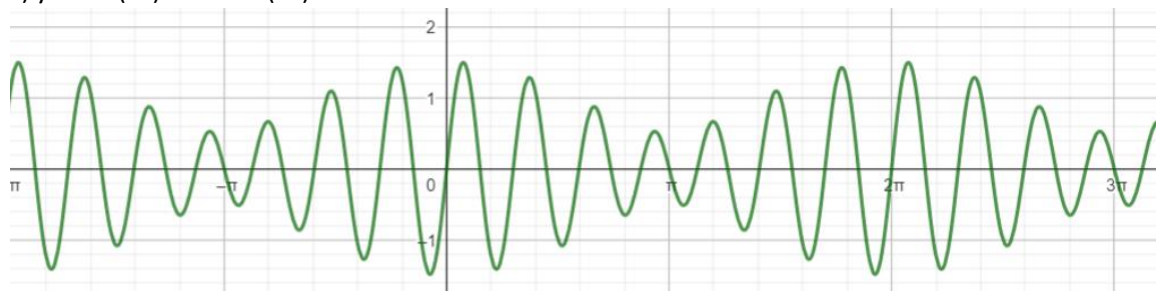
d) $y = \sin x + 3 \sin(3x) + 2 \sin(0,5x)$



e) $y = \sin(3x) + 0,5 \sin(0,2x)$



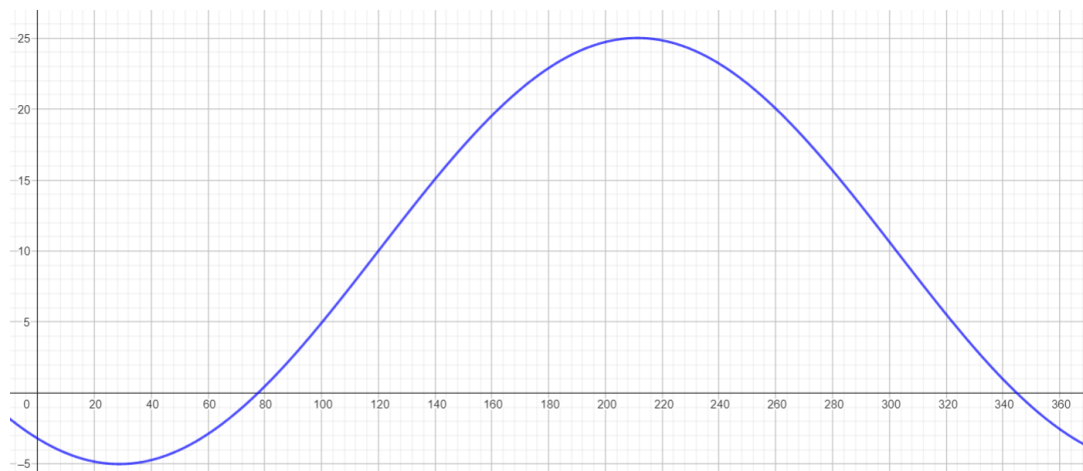
f) $y = \sin(7x) + 0.5 \sin(6x)$



38. In een streek in Spanje kweekt men intensief groenten. Voor het groeiseizoen moet de gemiddelde dagtemperatuur 8°C zijn. De gemiddelde dagtemperatuur kan benaderd worden door het volgende voorschrift (met T de temperatuur en t de tijd in dagen).

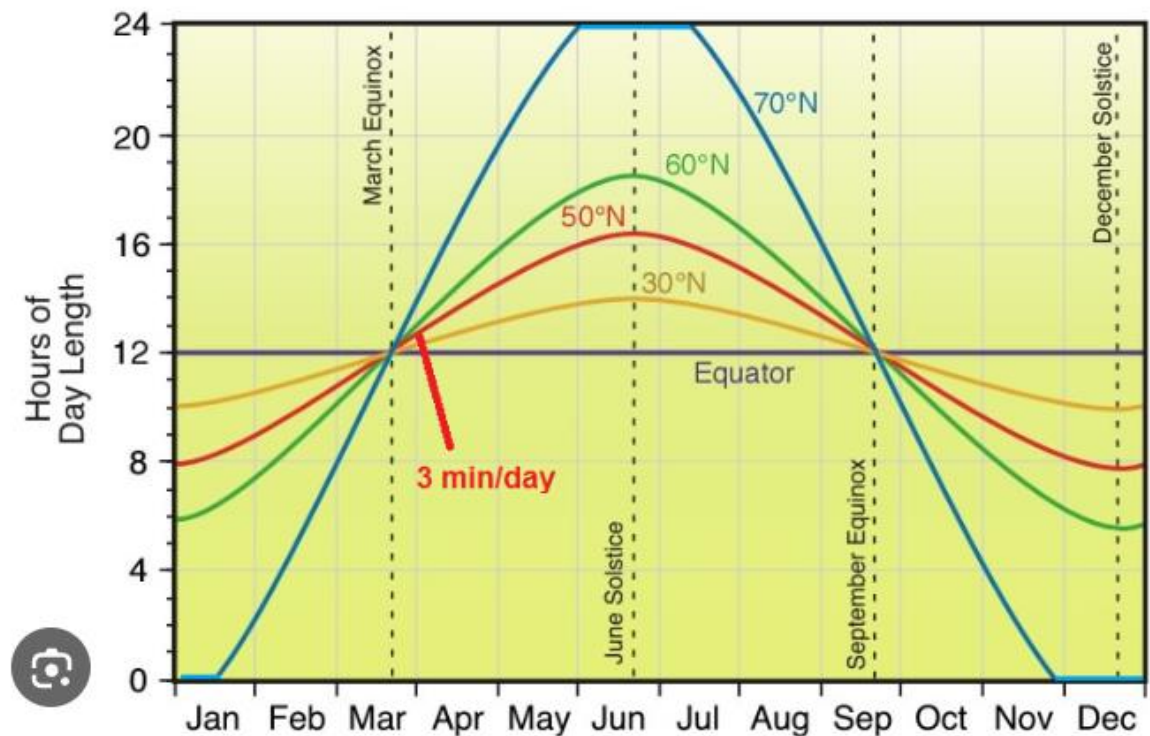
$$T(t) = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 120)\right) + 10$$

Wanneer begint en eindigt het groeiseizoen?



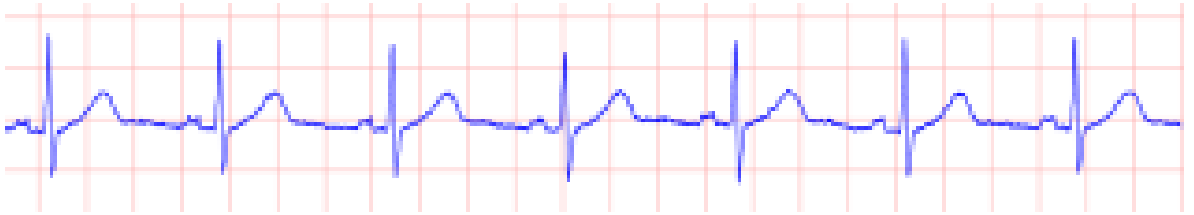
39. De daglengte is de tijd dat op een bepaalde plaats een dag duurt. Met een dag bedoelt men hier de tijd wanneer de zon boven de horizon is.

Op deze grafiek staat de daglengte getekend in functie van de tijdstippen in een jaar. Hoe lang een dag duurt hangt af van de plaats op aarde, vooral hoe ver deze plaats van de evenaar verwijderd is. De grafiek is een vereenvoudiging van de werkelijkheid.

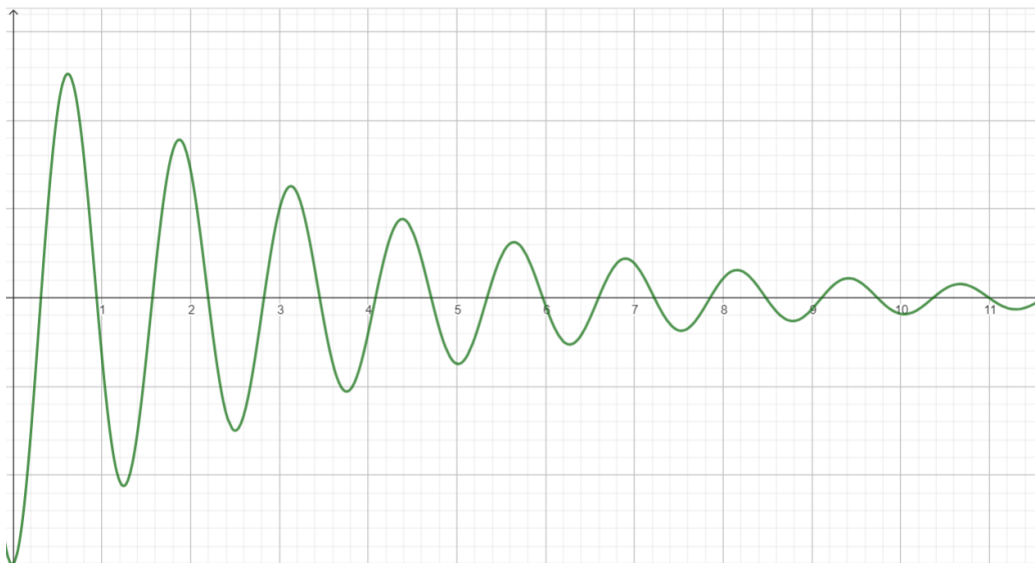


- In welk land duurt dag en nacht ongeveer even lang, gedurende het hele jaar?
A) Polen B) Marokko C) Ecuador D) Zuid-Afrika E) Australië
- Charleroi ligt ongeveer op 50° noorderbreedte (NB). Hoeveel bedraagt het verschil tussen de langste en de kortste dag?
- Waarom zijn er in de grafiek van 70° N horizontale lijnen?
- Op welke dag neemt de daglengte het vlugst toe?
- Oslo (hoofdstad van Noorwegen) ligt op 60° NB. De daglengte op 21 juni is ongeveer 16u 45 min. De daglengte op 21 december is ongeveer 7 u 45 min. Hoe lang duurt de daglengte gemiddeld? Hoe lang is de periode van de sinusfunctie die de daglengte voorstelt? Op welke dag in het jaar ligt de daglengte op de evenwichtslijn? Stel het functievoorschrift van de daglengte in Oslo op.

40. Een cardiogram heeft een mooie sinusvorm als de periode heel herkenbaar is. Mensen en dieren met een hartritmestoornis hebben een wisselende hartslag. Een hartslag is het aantal keer dat een hart klopt per minuut. Schat de hartslag bij deze cardiogram. Eén hokje is 0,25 seconde.



41. Fien hang aan de springplank van het zwembad. Op tijdstip $t = 0$ laat Fien de springplank los en blijft de springplank natrillen (op de horizontale as staan de tijdstippen in seconden en op de verticale as de uitwijking van de plank in cm.)
Door de weerstand van de lucht verkleint de uitwijking in functie van de tijd.



- a) Na hoeveel seconden is de uitwijking van de springplank kleiner dan 1 cm?
b) Het voorschrift van deze uitwijking is $f(x) = 3 \cdot 2^{-0,4x} \sin \left[5 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right]$
Bereken de uitwijking op het tijdstip 7 seconden.