

De cirkel



Machteld Verhenne

Inhoudstafel

1	Koorde en middellijn	2
1.1	Cirkel	2
1.2	Afstand van een punt tot een rechte	3
1.3	Koorde en middelloodlijnen	3
1.4	Omgeschreven cirkel	6
2	Hoeken in een cirkel	10
2.1	Middelpuntshoeken	10
2.2	Omtrekshoeken	11
3	Koordinvierhoek	17
3.1	Koordinvierhoek	17
3.2	De stelling van Ptolemaios	20
3.3	Macht van een punt	22
4	Raaklijn aan een cirkel	24
4.1	Raaklijn in een punt van de cirkel	24
4.2	Raaklijnen vanuit een punt aan een cirkel	28
4.3	Ingeschreven cirkel van een driehoek	31
4.4	Gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels	33
5	Centraal en onderlinge ligging	35
6	Regelmatige veelhoeken	40
6.1	Regelmatige veelhoeken	41
6.2	Omtrek en oppervlakte van een regelmatige n-hoek	43
6.3	Omtrek en oppervlakte van een cirkel	45
7	Oefeningen	47
7.1	Koorde en middellijn	47
7.2	Hoeken	48
7.3	Raaklijnen	53
7.4	Koordinvierhoek	55
7.5	Centraal en onderlinge ligging	56
7.6	Regelmatige veelhoeken	58
7.7	Herhalingsoefeningen	61

1 Koorde en middellijn

1.1 Cirkel

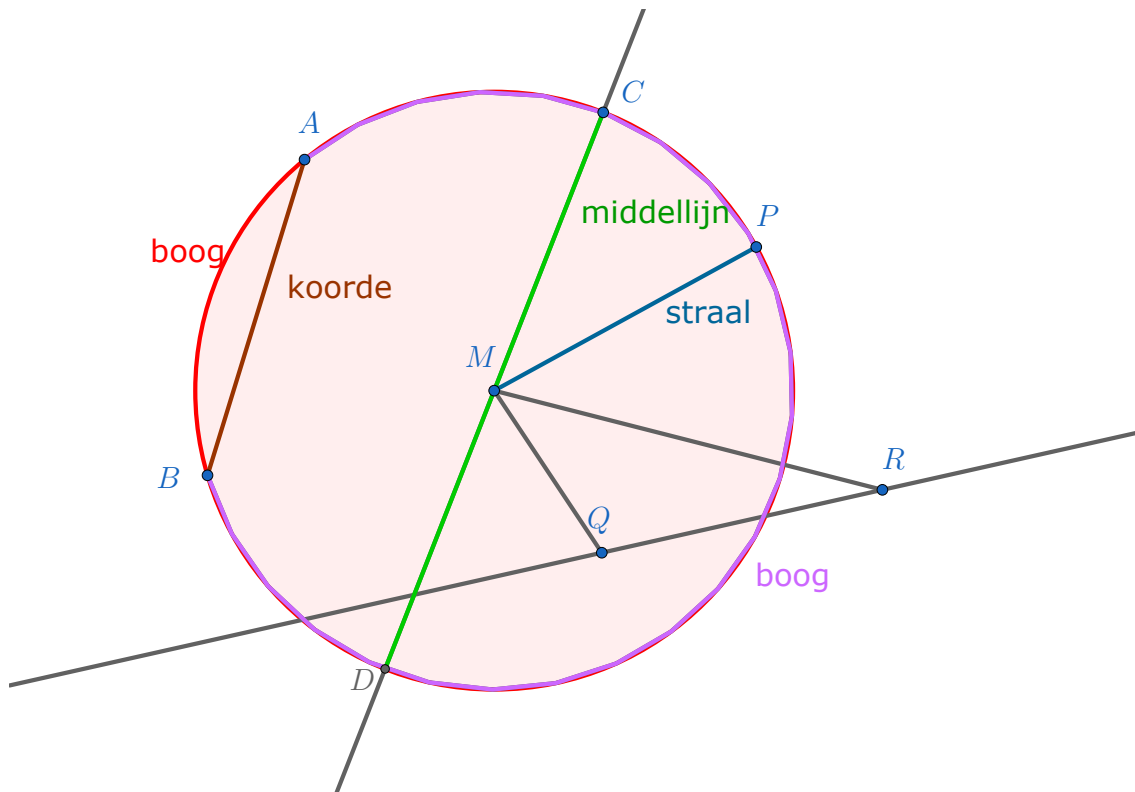
Een **cirkel** is de verzameling van de punten die even ver van een gekozen punt M liggen. M noemen we het **middelpunt**.

De afstand tussen het middelpunt en de punten van de cirkel noemen we de straal r .
notatie: $c(M, r)$

Een punt Q ligt binnen de cirkel $c(M, r)$ als $|QM| < r$

Een punt R ligt buiten de cirkel $c(M, r)$ als $|RM| > r$
gevolg: QR snijdt de cirkel

Een **cirkelboog** $\widehat{AB}$ is een deel van de cirkel die de punten A en B van deze cirkel verbindt.
De kleine boog is de boog die het kortste deel van de cirkel tussen A tot B .



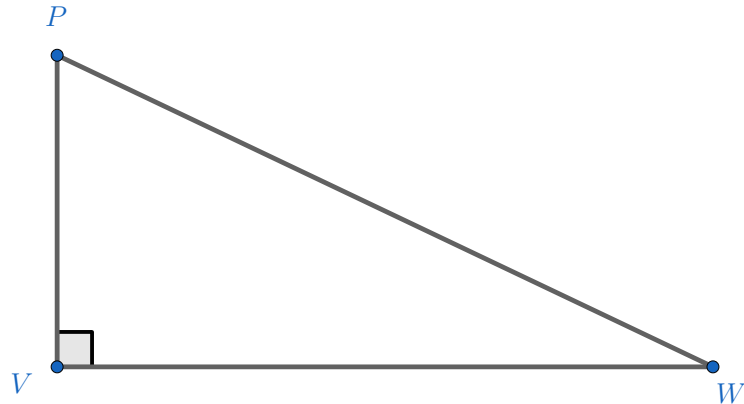
De grote boog is de boog die het langste deel van de cirkel tussen A tot B . Soms wordt daarvoor een extra punt in de notatie genomen: boog $\widehat{ADB}$ bijvoorbeeld.

Een **koorde** $[AB]$ van een cirkel is het lijnstuk met A en B twee punten van de cirkel.

Als de koorde $[CD]$ ook door het middelpunt gaat dan is deze koorde een middellijn van de cirkel. De lengte $|CD|$ van de middellijn is het dubbele van de straal en noemen we de diameter. Ook een rechte die door het middelpunt gaat noemen we een middellijn van de cirkel.

1.2 Afstand van een punt tot een rechte

1. Waarom is $|PV| < |PW|$?

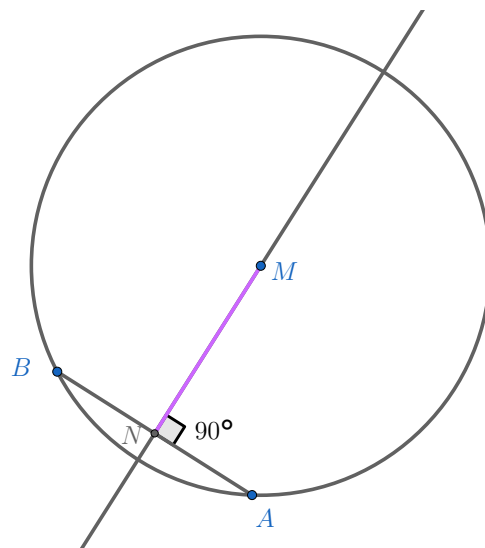


De afstand $d(P, r)$ van een punt P tot een rechte r is de afstand tussen P en het voetpunt V van de loodlijn l uit P op r .

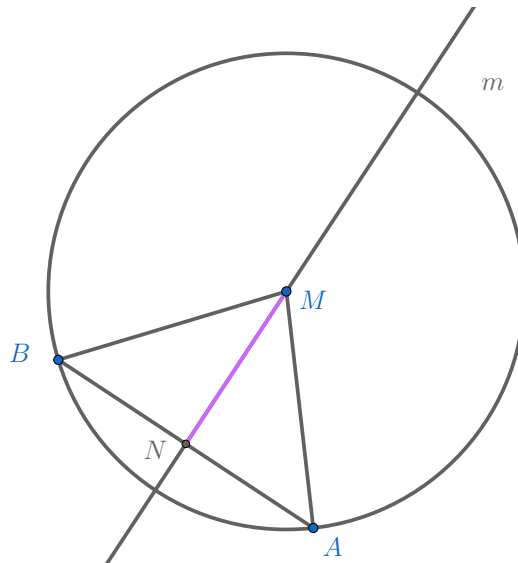
2. Een koorde van een cirkel met straal 5 cm is 6 cm lang. Wat is de afstand van het middelpunt tot deze koorde?

1.3 Koorde en middelloodlijnen

Het **apothema** van een koorde is de afstand van het middelpunt tot deze koorde.
Het apothema is altijd kleiner dan de straal van de cirkel.
Ook het loodlijn MN uit het middelpunt op een koorde noemen we apothema.



De middellijn loodrecht op een koorde deelt de koorde middendoor.



Gegeven: $c(M, r)$ met koorde $[AB]$

middellijn $m \perp AB$

$m \cap AB = N$

Te bewijzen: $|AN| = |NB|$

Bewijs.

Verbind A en B met M.

$$\triangle ANM \cong \triangle BNM \text{ want } \begin{cases} |MN| = |MN| \\ MN \perp AB \\ |AM| = |BM| = r \end{cases} \quad (\text{kenmerk ZHZ})$$

$\Downarrow$ overeenkomstige zijden zijn gelijk

$$|AN| = |BN|$$

□

Gevolgen:

Gelijke koorden hebben gelijke apothema's.

Koorden die gelijke apothema's hebben zijn gelijk.

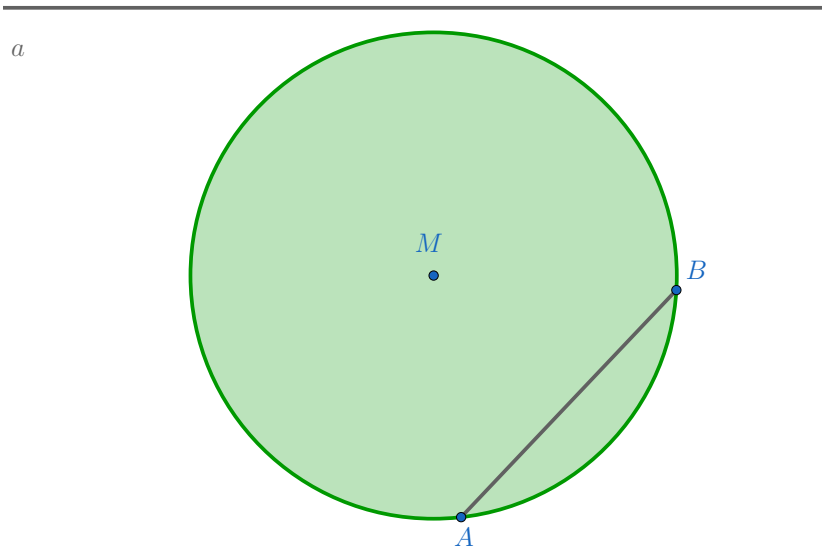
3. In de figuur hierboven bekijken we een rechte die de volgende drie eigenschappen heeft:

- (a) Ze gaat door het middelpunt
- (b) Ze staat loodrecht op een koorde
- (c) Ze deelt de koorde middendoor

Als twee van deze drie eigenschappen gegeven zijn, dan geldt de derde eigenschap.

Toon aan.

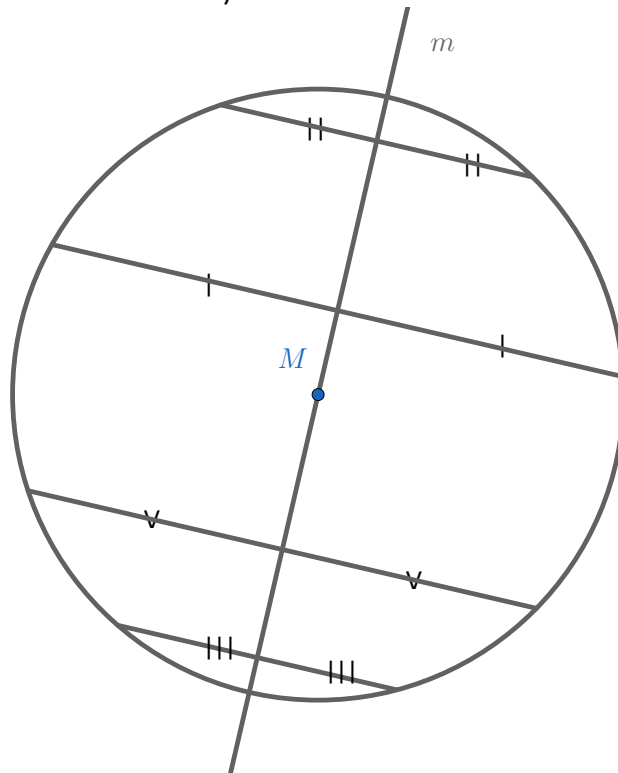
4. Uit een ronde boomstam met diameter 84 cm wil Koen een vierkantig tafelblad zagen. Wat is de zijde van het grootste vierkant dat Koen hieruit kan zagen?
5. Wat is de meetkundige plaats¹ van de middens van gelijke koorden van een gegeven cirkel?
6. Gegeven is een punt P binnen een cirkel. Construeer een koorde die door P gaat zodat P deze koorde in twee verdeelt.
7. $[AB]$ is een middellijn van een cirkel. Twee koorden $[AC]$ en $[BD]$ maken eenzelfde hoek met $[AB]$. Toon aan dat $|AC| = |BD|$.
8. Gelijke koorden hebben gelijke apothema's. Toon aan.
9. Teken een cirkel met straal 5. $[AB]$ is een koorde met apothema 4. Bereken $\widehat{AMB}$.
10. Gegeven is een cirkel $c(M, r)$ met koorde $[AB]$. Construeer de koorde $[CD]$ die evenwijdig is met de rechte a en die door $[AB]$ in twee gelijke stukken verdeeld wordt.



¹Een meetkundige plaats is een figuur gevormd door punten die een bepaalde eigenschap hebben.

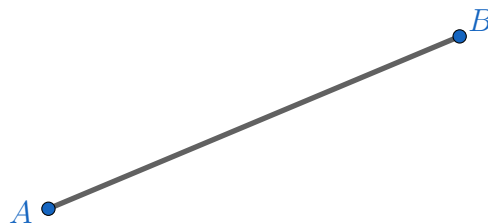
1.4 Omgeschreven cirkel ²

Een middellijn van een cirkel is een symmetrieas van deze cirkel.



De middellijn m staat loodrecht op de evenwijdige koorden en deelt dus deze koorden middendoor. Elke middellijn is een symmetrieas van de cirkel. De cirkel heeft dus oneindig veel symmetrieassen.

11. Gegeven is het lijnstuk $[AB]$.
Hoeveel cirkels kan je tekenen die
- (a) $[AB]$ als middellijn hebben?
 - (b) $[AB]$ als koorde verschillend van de middellijn hebben?

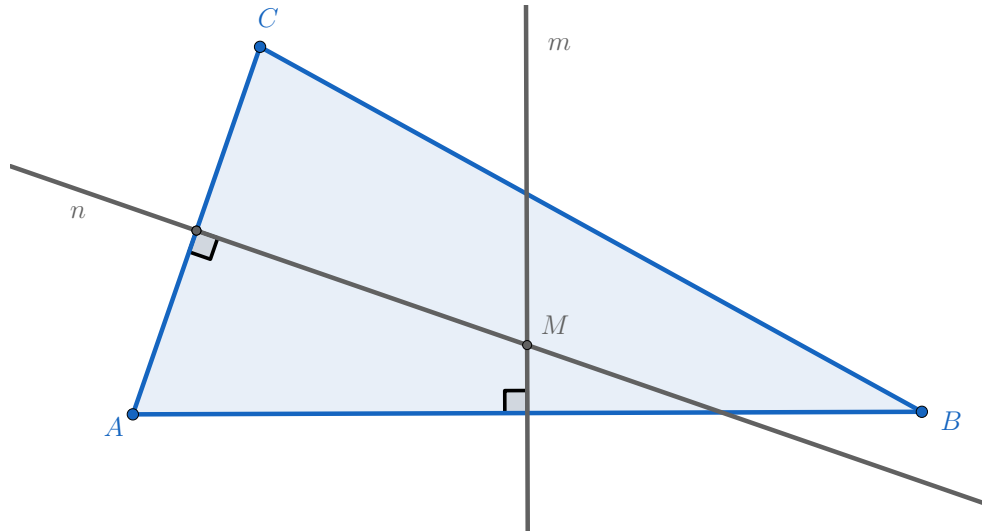


12. Gegeven zijn drie niet-collineaire punten A, B en C en de lijnstukken $[AB]$ en $[BC]$.
Teken de cirkel(s) die $[AB]$ én $[BC]$ als koorde hebben.

²Een synoniem voor omgeschreven cirkel is omcirkel

Omgeschreven cirkel van een driehoek

Door de hoekpunten van een driehoek gaat juist één cirkel.



Gegeven: driehoek ABC

Te bewijzen: Er gaat juist één cirkel door A, B en C

Bewijs.

Construeer de middelloodlijnen m en n van $[AB]$ en $[AC]$

$$M = m \cap n$$

$\Downarrow$

$$M \in m \text{ en } M \in n$$

$\Downarrow$ De middelloodlijn van een lijnstuk is de meetkundige plaats van alle punten die even ver van de uiteinden van dat lijnstuk liggen.

$$|AM| = |MB| \text{ en } |AM| = |MC|$$

$\Downarrow$

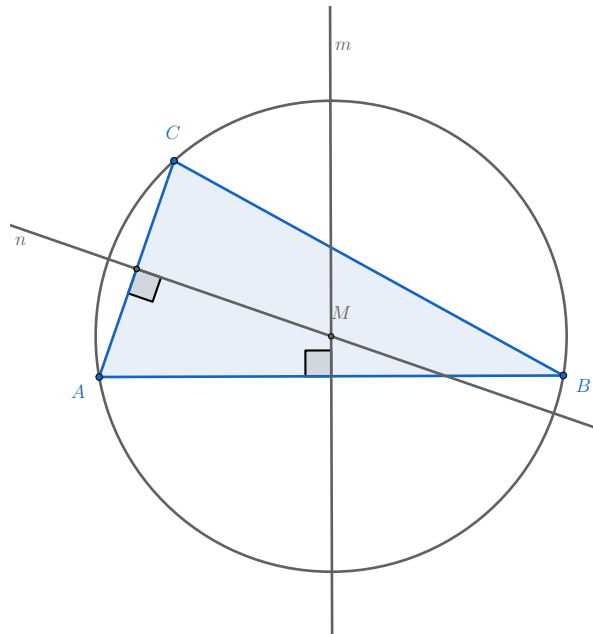
$$|AM| = |MB| = |MC|$$

Dus de cirkel met middelpunt M en straal $|AM|$ gaat door A, B en C.

Omdat m en n één snijpunt M hebben, is er maar één punt dat even ver van A, B en C ligt. Dus $c(M, |AM|)$ is uniek. $\square$

De cirkel die door de driepunten van een driehoek gaan is de omgeschreven cirkel (of omcirkel) van deze driehoek.

Het middelpunt van deze cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van deze driehoek. De straal van deze omcirkel is de afstand van het middelpunt tot één van de hoekpunten van de driehoek.



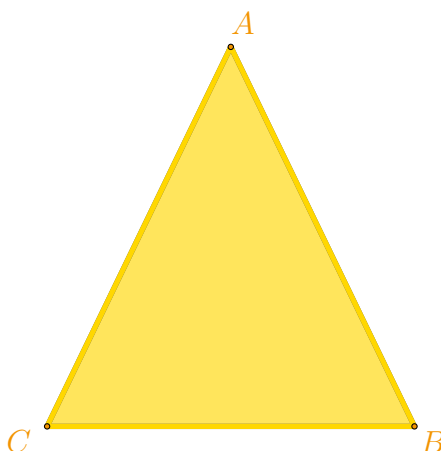
De hoekpunten van een driehoek liggen niet op één rechte. Het zijn niet-collineaire punten. We zeggen daarom ook:

Door drie niet-collineaire punten gaat één cirkel.

13. Gegeven is een gelijkbenige driehoek met basis 8 cm en opstaande zijden 5 cm.

(a) Teken de omgeschreven cirkel van deze driehoek.

(b) Bereken de straal van deze cirkel.



14. Gegeven is een koorde $[AB]$ van een cirkel c met straal 6 cm. $|AB| = 10$.
Hoe ver ligt het middelpunt M van $[AB]$?
15. De provincie heeft beslist om een extra GSM mast toe te laten om de dorpen Amerlinck, Bruinbeek en Kruisbergen beter te bedienen.
Welke plaats is de ideale plaats voor deze GSM mast?

K

A small blue dot representing point K.

C

A small blue dot representing point C.

B

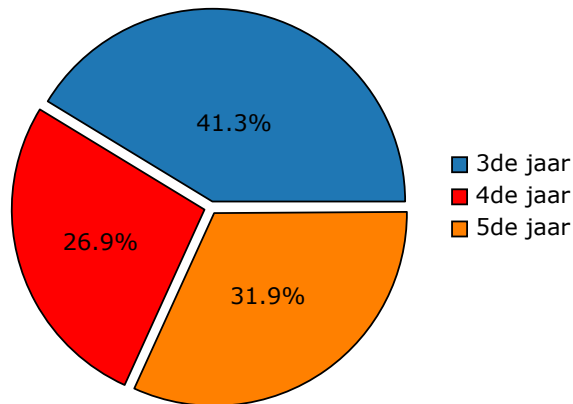
A small blue dot representing point B.

2 Hoeken in een cirkel

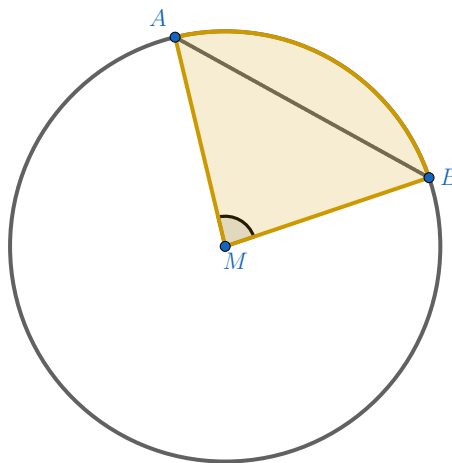
2.1 Middelpuntshoeken

16. UHasselt organiseert een zomerschool wiskunde voor leerlingen uit het derde, vierde en vijfde jaar. De verdeling van het aantal leerlingen staat in dit cirkeldiagram. Als je zelf dit diagram zou moeten tekenen, hoe groot moet je dan de hoek voor de **cirkelsector**³ van de vijfdejaars afmeten?

In welk jaar zat je het voorbije schooljaar?
160 antwoorden



Een **middelpuntshoek** is een hoek waarvan het hoekpunt op het middelpunt van een cirkel ligt. De benen van een middelpuntshoek snijden altijd de cirkel. De middelpuntshoek staat op de boog (of koorde) die daardoor ontstaat. Het deel van de cirkel die de benen van een middelpuntshoek insluit is een **cirkelsector**



$\widehat{M}$ staat op $\widehat{AB}$ (of op de koorde [AB])

³Sector is afgeleid uit sectare (Latijn) wat snijden betekent.

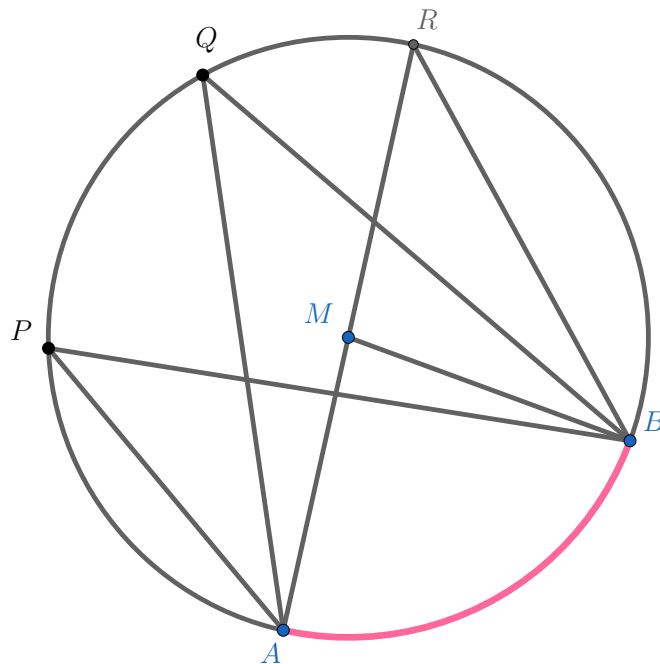
17. Gegeven is de cirkel $c(M, r)$. P is een punt van de cirkel. De koorde [AB] is de middelloodlijn van [MP]. Toon aan dat de middelpuntshoek die op de koorde [AB] staat 120° is.
18. Terwijl Willem eten aan het bereiden was, is de kleine wijzer van een analoge klok een hoek van 40° verder gedraaid. Hoeveel minuten heeft Willem nodig gehad om het eten klaar te maken?



2.2 Omtrekshoeken

Een **omtrekshoek** P op $\widehat{AB}$ is de hoek waarvan het hoekpunt P op de omtrek van een cirkel staat en waarbij de benen van deze hoek van de cirkel een boog $\widehat{AB}$ (of koorde [AB]) afsnijdt.

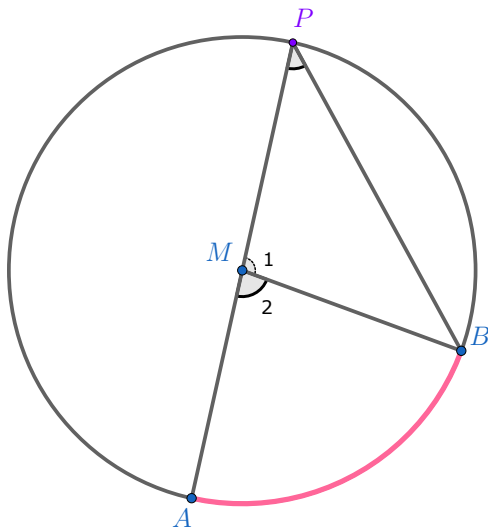
19. Meet de hoeken $\widehat{P}$, $\widehat{Q}$ en $\widehat{R}$ die op $\widehat{AB}$ staan.
 Meet ook de middelpuntshoek die op $\widehat{AB}$ staat.
 Welke verbanden zijn er?



Een omtrekshoek is de helft van de middelpuntshoek die op dezelfde boog staat.

Bewijs.

Eerste geval: Een been van de omtrekshoek gaat door het middelpunt M



$\triangle MBC$ is gelijkbenig want $|MB| = |MP| = r$

↓ in een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk

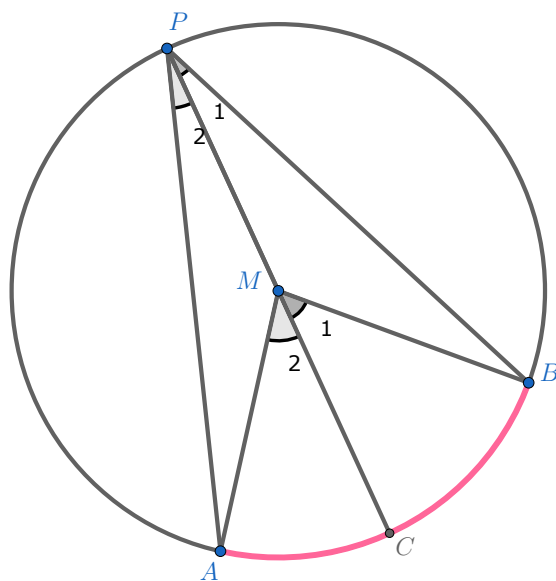
De drie hoeken in driehoek hebben als som 180° .

$$\widehat{M}_1 = 180^\circ - \widehat{P} \text{ en } 180^\circ - \widehat{M}_1 = 2\widehat{P}$$

$$\downarrow 180^\circ - \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$

$$\widehat{M}_2 = 2\widehat{P}$$

Tweede geval: Het middelpunt ligt tussen beide benen van de omtrekshoek.



Verbind het hoekpunt P met het middelpunt M.

De rechte PM snijdt de cirkel in C

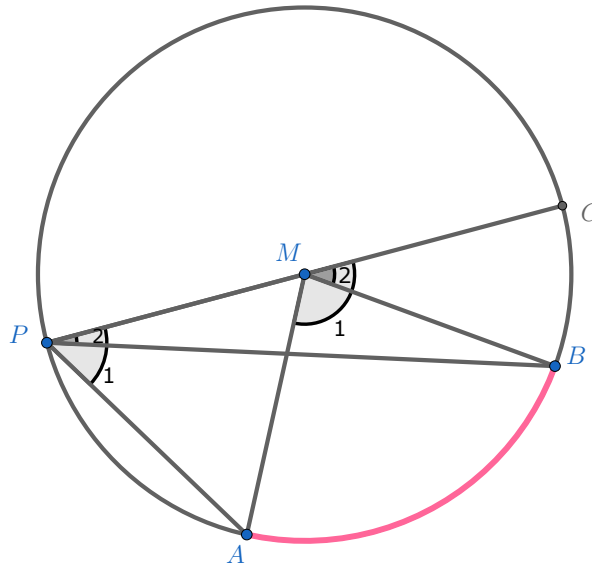
$\widehat{P}$ wordt dan verdeeld in twee omtrekshoeken waarvan één been

Op het middelpunt ligt: $\widehat{P}_1$ en $\widehat{P}_2$

Wegens het eerste geval geldt: $\widehat{M}_1 = 2 \widehat{P}_1$ en $\widehat{M}_2 = 2 \widehat{P}_2$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 &= 2 \widehat{P}_1 + 2 \widehat{P}_2 \\ \widehat{M} &= 2 (\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2) \\ \widehat{M} &= 2 \widehat{P} \end{aligned}$$

Derde geval: Het middelpunt ligt buiten beide benen van de omtrekshoek.



Verbind het hoekpunt P met het middelpunt M.

De rechte PM snijdt de cirkel in C

$\widehat{P}$ wordt vergroot tot een omtrekshoek waarvan één been op het middelpunt ligt: $\widehat{P}_1$

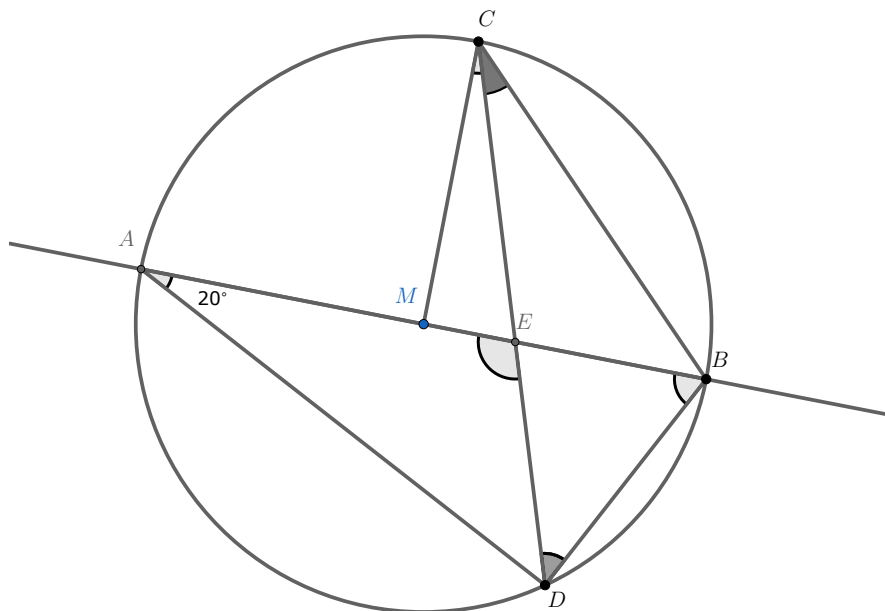
$\widehat{P}_2 = \widehat{P}_1 - \widehat{P}$ en $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_1 - \widehat{M}$

Wegens het eerste geval geldt: $\widehat{M}_1 = 2 \widehat{P}_1$ en $\widehat{M}_2 = 2 \widehat{P}_2$

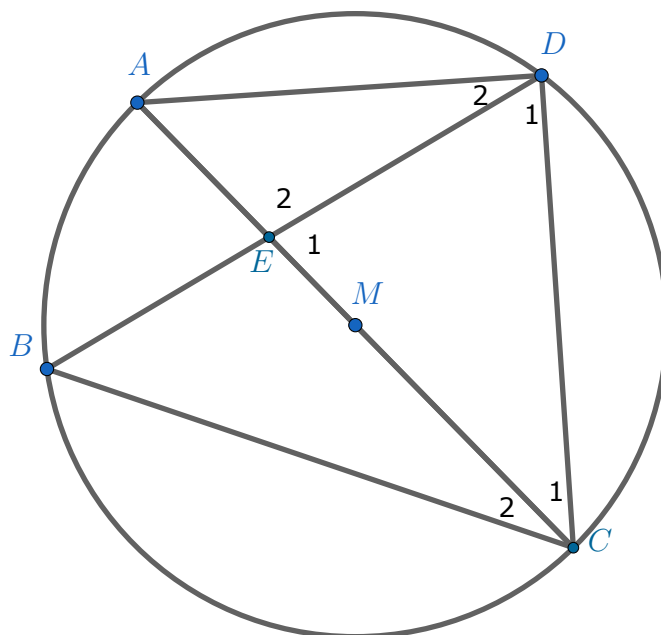
$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \widehat{M}_1 - \widehat{M}_2 &= 2 \widehat{P}_1 - 2 \widehat{P}_2 \\ \widehat{M} &= 2 (\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2) \\ \widehat{M} &= 2 \widehat{P} \end{aligned}$$

□

20. Bereken $\widehat{B}_1, \widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \widehat{D}_1$ en $\widehat{E}_1$ in de cirkel met middelpunt M als $\widehat{A} = 20^\circ$ en $CM \perp AB$.

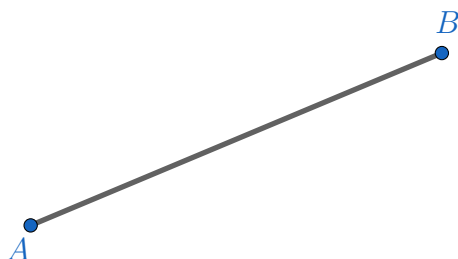


21. Gegeven in de cirkel $c(M,r)$: $\widehat{C}_1 = 80^\circ$ en $\widehat{D}_2 = 30^\circ$
Bereken $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}_2$, $\widehat{D}_2$, $\widehat{E}_1$, $\widehat{E}_2$.

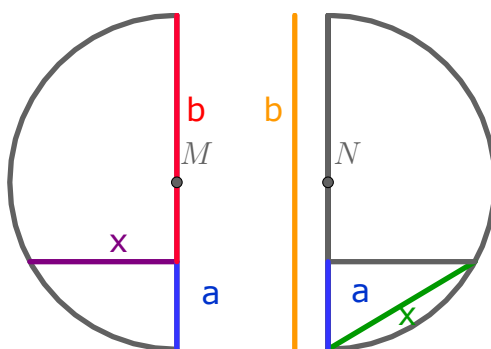


Tekening is niet op schaal.

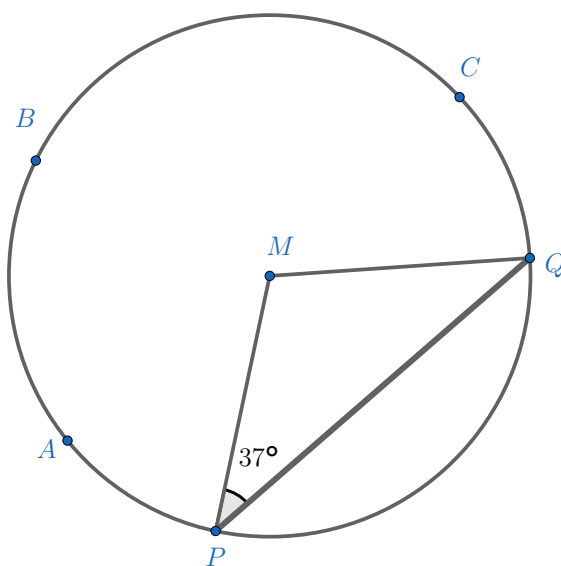
22. Construeer (dus gebruik enkel passer en liniaal) een rechthoekige driehoek met als schuine zijde $[AB]$.



23. Een getal x is middelevenredig met de getallen a en b als en slechts als $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ of $x^2 = a \cdot b$.
In deze halve cirkels is x middelevenredig tussen a en b . Verklaar

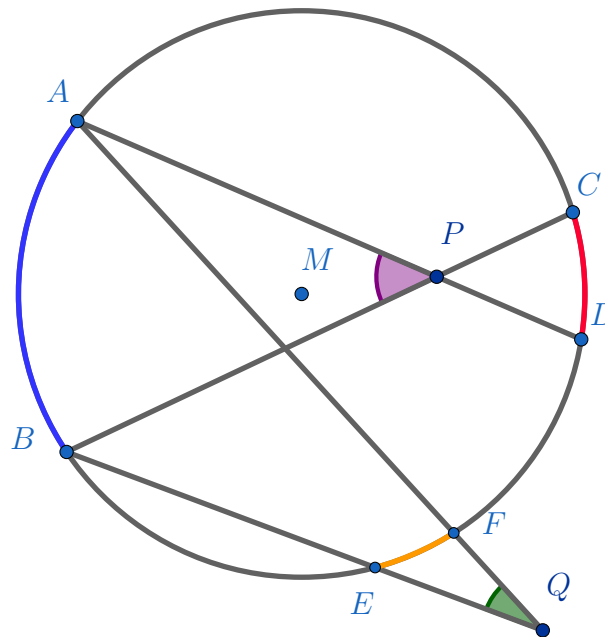


24. Gegeven is de cirkel $c(M, r)$ met $P, Q, A, B, C \in c$



- (a) Onder welke hoek zien we de koorde $[PQ]$ vanuit de punten A , B en C ?
(b) Teken een cirkelboog van waaruit we $[RS]$ zien onder een hoek van 50° .

25. Bepaal de meetkundige plaats van de punten van waaruit we $[AB]$ zien onder een hoek van 90° .
26. Gegeven twee lijnstukken $[AB]$ en $[BC]$. Vanuit P ziet men $[AB]$ onder een hoek van 30° en $[BC]$ onder een hoek van 45° . Bepaal de ligging van P .
27. Een **binnenomtrekshoek** is een hoek waarvan het hoekpunt binnen de cirkel ligt. De binnenomtrekshoek $\widehat{P}$ ligt op $\widehat{AB}$. $\widehat{CD}$ is de overstaande boog. Een **buitenomtrekshoek** is een hoek waarvan het hoekpunt buiten de cirkel ligt en elk been de cirkel snijdt. De buitenomtrekshoek $\widehat{Q}$ ligt op de bogen AB en EF .



- (a) Een binnenomtrekshoek is gelijk aan de som van een omtrekshoek die op de boog binnen deze hoek staat en een omtrekshoek die op de overstaande boog staat. Toon aan.
- (b) Een buitenomtrekshoek is gelijk aan het verschil van omtrekshoeken die op de bogen binnen deze hoek staan. Toon aan.

3 Koordenvierhoek

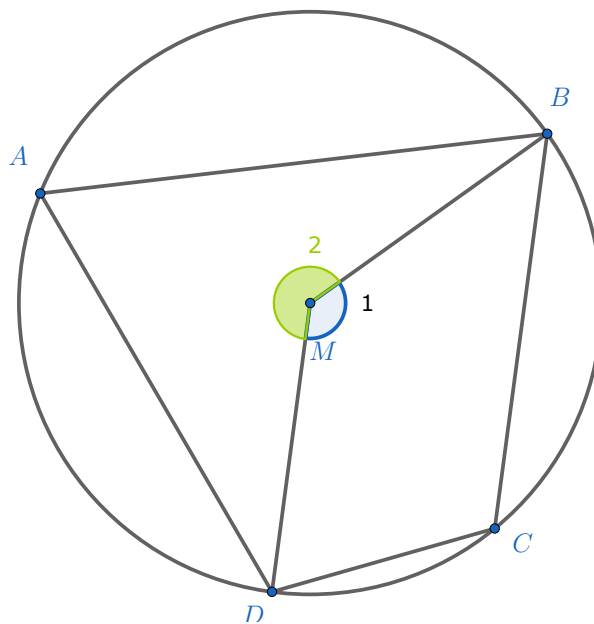
3.1 Koordenvierhoek

Een **koordenvierhoek** is een vierhoek waarbij de vier zijden koorden van een cirkel zijn.

Een **convexe⁴ vierhoek** is een koordenvierhoek als en slechts als de overstaande hoeken supplementair zijn.

Als een vierhoek een koordenvierhoek is, dan zijn de overstaande hoeken supplementair.

Bewijs. Verbind twee overstaande hoekpunten met het middelpunt M.



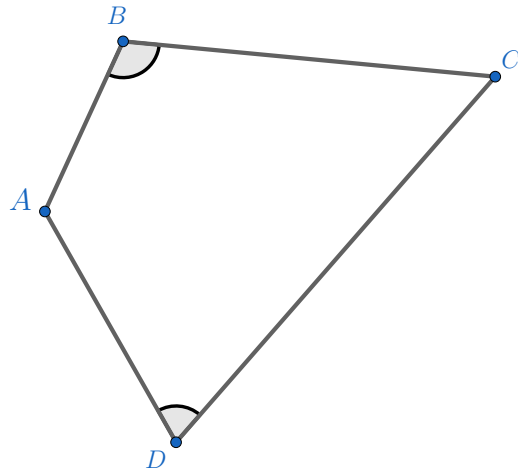
$$\begin{aligned}
 \widehat{A} + \widehat{C} &= \frac{1}{2}\widehat{M_1} + \frac{1}{2}\widehat{M_2} \\
 &= \frac{1}{2}(\widehat{M_1} + \widehat{M_2}) \\
 &= \frac{1}{2}360^\circ \\
 &= 180^\circ
 \end{aligned}$$

□

⁴Een convexe veelhoek is een veelhoek waarvan geen enkele diagonaal een zijde snijdt. Convex = bolrond

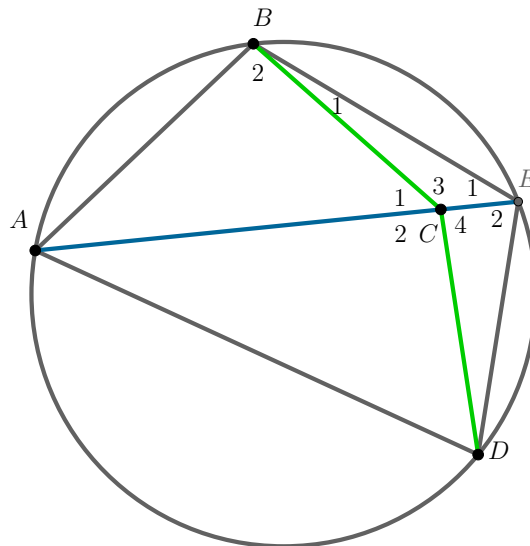
Als de overstaande hoeken van een convexe vierhoek supplementair zijn, dan is deze vierhoek een koordenvierhoek.

Gegeven: vierhoek ABCD met $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$



Te bewijzen: ABCD is een koordenvierhoek (A, B, C en D liggen op eenzelfde cirkel)

Bewijs. We tekenen de omcirkel c van $\triangle ABD$. We bewijzen dat C ook op deze cirkel ligt.



- Veronderstel dat C binnen de cirkel ligt.

Verbind A met C.

$$AC \cap c = \{E\}$$

ABED is een koordenvierhoek

$\Downarrow$ In een koordenvierhoek zijn de overstaande hoeken supplementair

$$\widehat{A} + \widehat{E} = 180^\circ$$

$$\Downarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\widehat{E} = \widehat{C}$$

(*)

- In $\triangle BCE$ geldt: $\widehat{C}_3 = 180^\circ - \widehat{B}_1 - \widehat{E}_1$ (1)
 en voor de buitenhoek van $\triangle ADE$ geldt: $\widehat{C}_3 = 180^\circ - \widehat{C}_1$ (2)
 Uit (1) en (2) volgt: $\widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$. Dus $\widehat{C} > \widehat{E}_1$ (3)
 Analoog geldt via $\triangle CDE$: Dus $\widehat{C} > \widehat{E}_1$ (4)

Uit (3) en (4) volgt: $\widehat{C} > \widehat{E}$
 Dit is strijdig met (*). Dus C kan niet binnen de cirkel liggen.

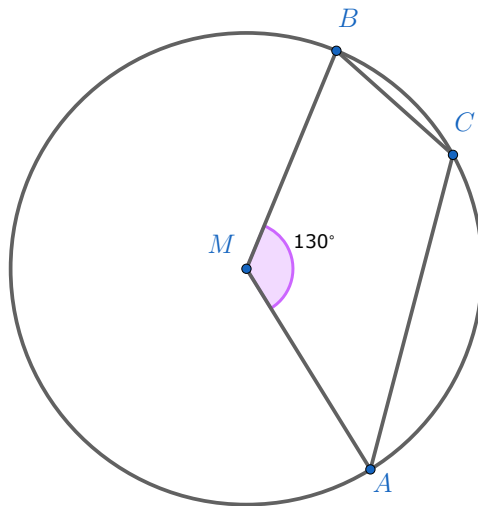
- Veronderstel dat C buiten de cirkel ligt.
 Analoog als a) kunnen we bewijzen dat dit tot een tegenstrijdigheid leidt.
- C ligt op de cirkel
 Dit is de enige mogelijkheid die over blijft.
 Besluit: ABCD is een koordenvierhoek

□

28. Bereken de hoeken van een koordenvierhoek ABCD als

- (a) $\widehat{A} = 80^\circ$ en $\widehat{B} = 50^\circ$
 (b) $\widehat{A} = 2\widehat{C}$ en $4\widehat{B} = 3\widehat{C}$

29. De punten A, B en C liggen op een cirkel met middelpunt M.
 Als $\widehat{AMB} = 130^\circ$, hoe groot is dan $\widehat{ACB}$?



De tekening is niet op schaal.

- a) 65° b) 90° c) 115° d) 120° e) 130°

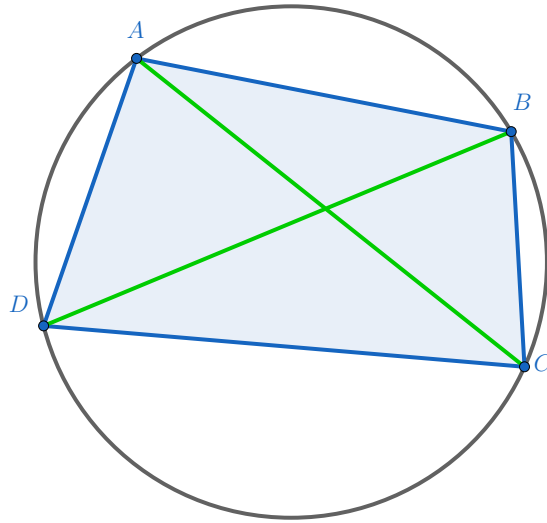
VWO 2011, eerste ronde

30. Teken een koordenvierhoek ABCD met $|AB| = 25$, $|BC| = 3.2$, $|CD| = 4.5$ en $\widehat{D} = 70^\circ$.

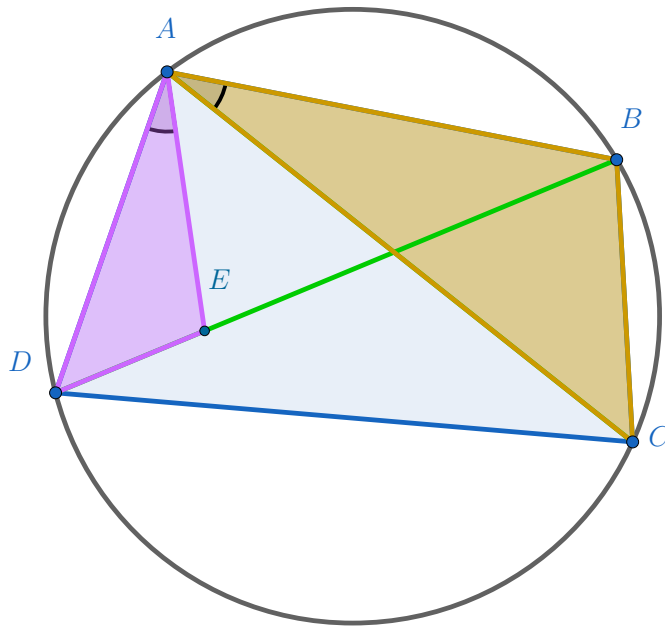
3.2 De stelling van Ptolemaios ⁵

In een koordenvierhoek is de som van de producten van de overstaande zijden gelijk aan het product van de diagonalen.

In een koordenvierhoek ABCD geldt: $|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|$



Bewijs. We herschrijven de eerste term van het linkerlid



Teken een punt E op [BD] zodat $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$ (1)

$\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ omtrekshoeken op zelfde boog (2)

Uit (1) en (2) volgt wegens het gelijkvormigheidskenmerk twee gelijke hoeken:

⁵Ptolemaios: Griekse sterrenkundige – tweede eeuw n.C.

$$\triangle ADE \sim \triangle ACB$$

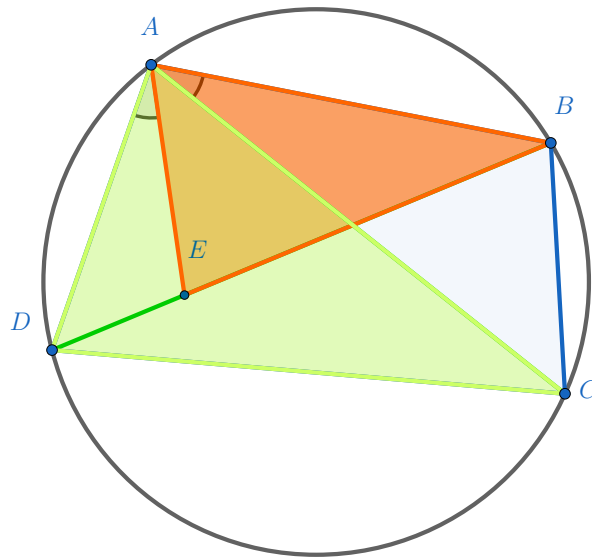
↓ overeenkomstige zijden zijn evenredig

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

↓ kruisproduct

$$|AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |DE| \quad (3)$$

We herschrijven de tweede term van het linkerlid



$$E\hat{A}B = E\hat{A}C + C\hat{A}B \text{ en } D\hat{A}C = D\hat{A}E + E\hat{A}C$$

↓ $C\hat{A}B = D\hat{A}E$ wegens constructie punt E

$$E\hat{A}B = D\hat{A}C \quad (4)$$

Bovendien geldt: $A\hat{D}E = A\hat{C}B$ omtrekshoeke op zelfde boog (5)

Wegens gelijke hoeken (4) en (5) geldt: $\triangle ACD \sim \triangle ABE$

↓ overeenkomstige zijden zijn evenredig

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CD|}$$

↓ kruisproduct

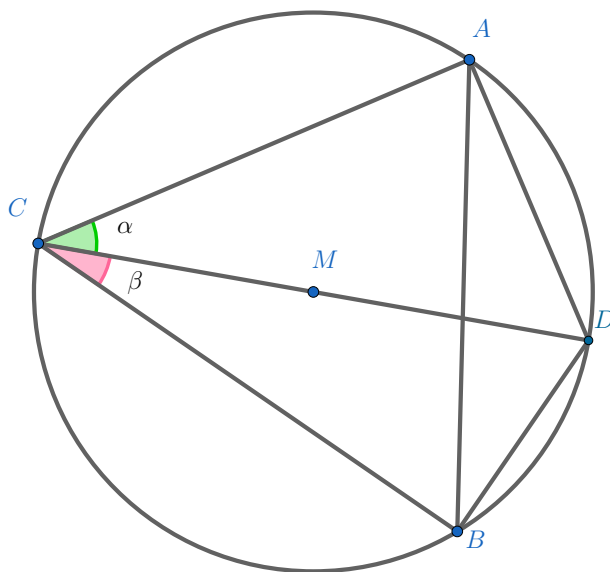
$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BE| \quad (6)$$

Uit (3) en (6) volgt:

$$\begin{aligned} |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |AC| \cdot |DE| + |AC| \cdot |BE| \\ &= |AC|(|DE| + |BE|) \\ &\downarrow E \in [DB] \\ &= |AC| \cdot |DB| \end{aligned}$$

□

31. Gegeven is een cirkel met straal 0.5 en middellijn $[CD]$.
 $[AB]$ is een koorde van de cirkel, waarbij A en B langs weersijden van $[CD]$ liggen.

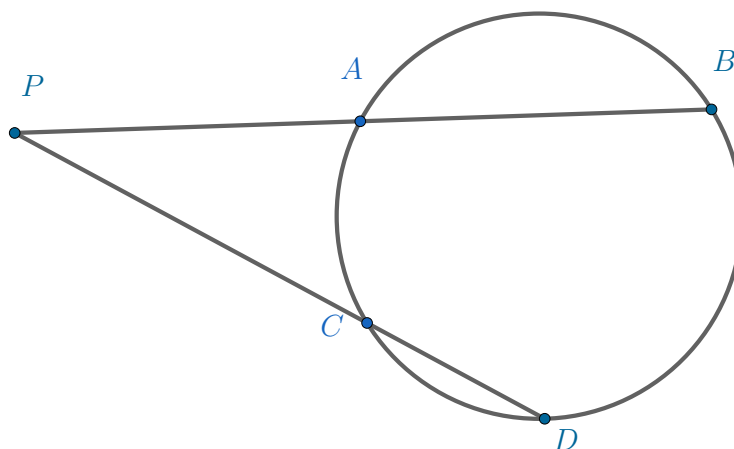
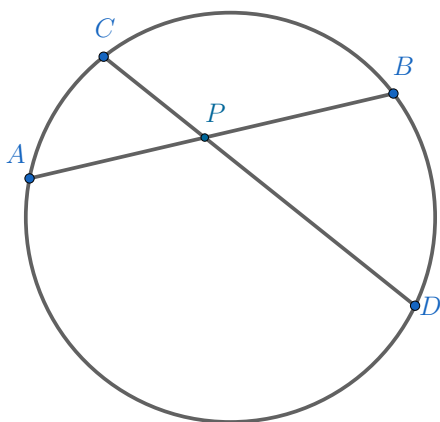


Toon aan dat $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$.

3.3 Macht van een punt

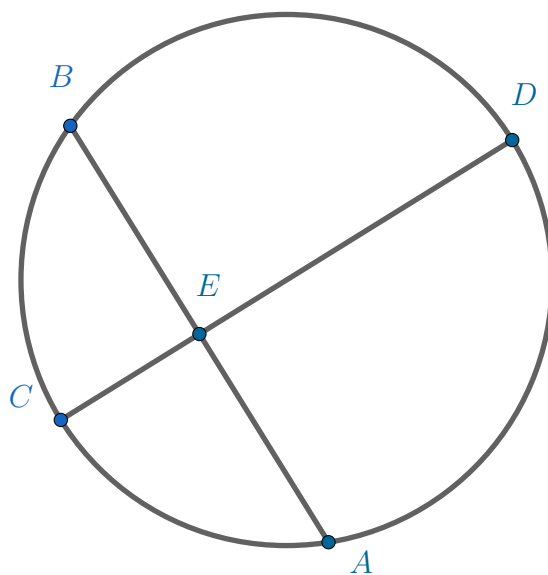
Als twee rechten uit een punt P een cirkel in A en B, respectievelijk C en D snijden, dan is $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.
 Dit getal noemen we de **macht van een punt P** t.o.v. de cirkel.

32. Toon de eigenschap van de macht van een punt aan.

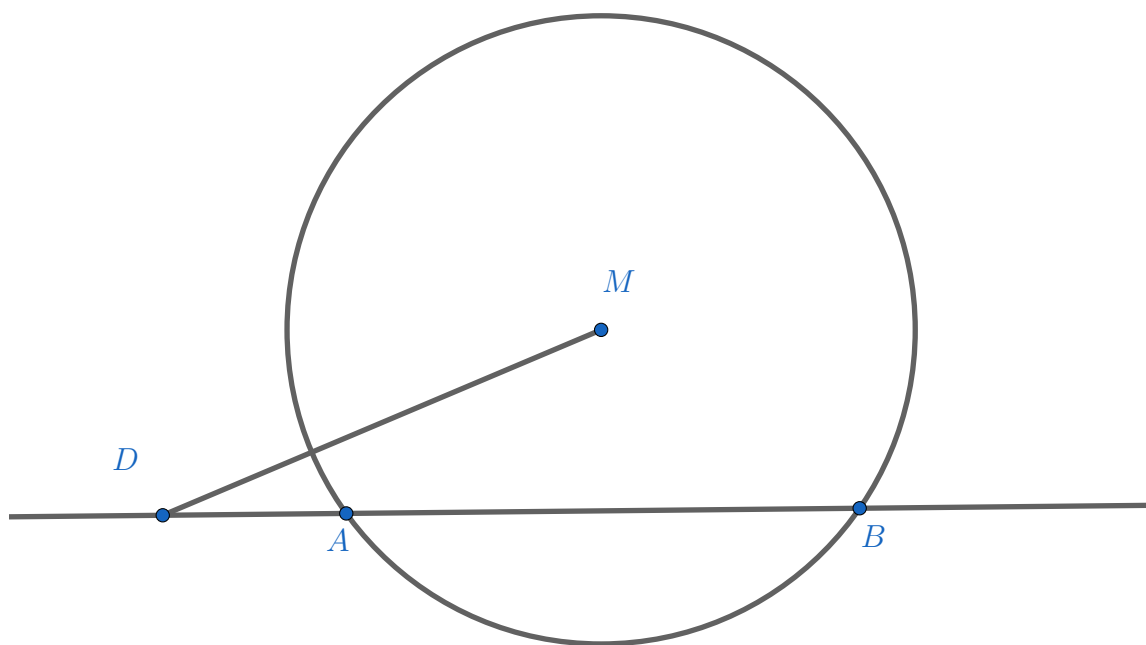


33. Bereken de lengte van de koorde $[AB]$ als $AB \perp CD$, waarbij $[CD]$ een middellijn van een cirkel is.

$$E = [CD] \cap [AB], |CE| = 4 \text{ en } |ED| = 16$$



34. Een rechte door D snijdt de cirkel $c(M,3)$ in A en B. $|DM| = 4$ en $|AB| = 4$.



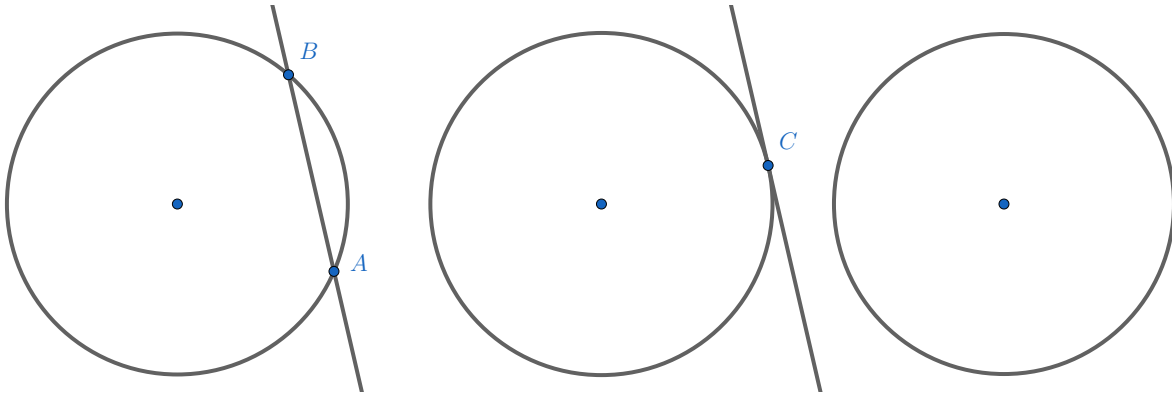
(a) Toon aan dat $|DA| \cdot |DB| = 7$

(b) Bereken $|DA|$

4 Raaklijn aan een cirkel

4.1 Raaklijn in een punt van de cirkel

Een rechte kan een cirkel in twee punten, één punt of geen enkel punt snijden.



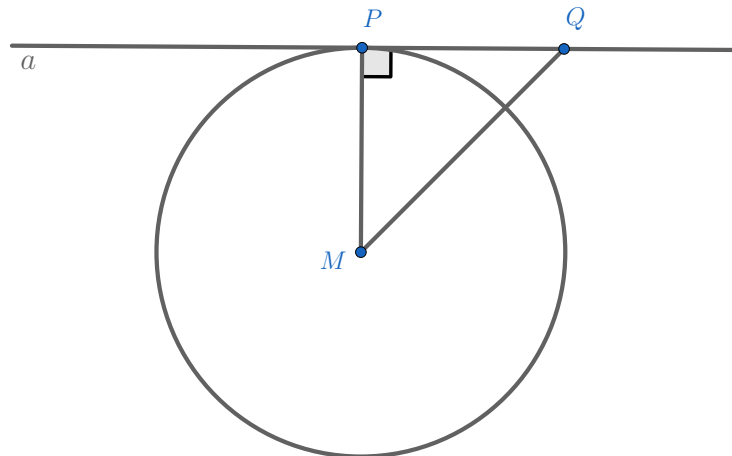
Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte a gelijk is aan de straal, dan heeft die rechte juist één punt gemeen met de cirkel.

Gegeven: $c(M, r)$

rechte a met $d(a, M) = r$

Te bewijzen: a heeft met de cirkel c juist één punt gemeen.

Bewijs.



Omdat $d(a, M) = r$ is er een punt $P \in a : |PM| = r$ met $PM \perp a$

1) $P \in c$ want $|PM| = r$

2) P is het enige punt dat op de cirkel ligt want:

Neem een ander punt Q op a .

MPQ is een rechthoekige driehoek met $\widehat{P} = 90^\circ$

$[MQ]$ is de schuine zijde.

In een rechthoekige driehoek is de schuine zijde de langste.

Dus $|MQ| > |PM| = r$

Elk ander punt op a dat verschillend is met P ligt buiten de cirkel.

□

We noemen de rechte a de **raaklijn** van deze cirkel. Het unieke gemeenschappelijk punt is het **raakpunt**.

Gevolg:

Als een rechte loodrecht staat op een middellijn $[AB]$ van een cirkel in een eindpunt van $[AB]$, dan is deze rechte een raaklijn aan de cirkel.

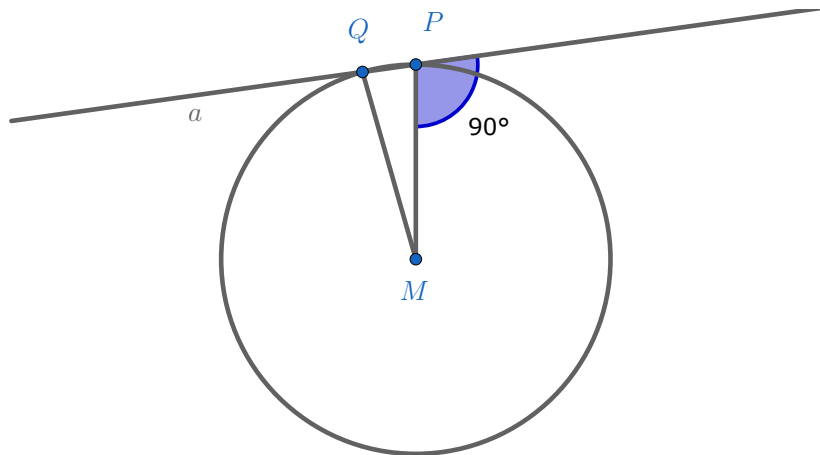
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de middellijn die door het raakpunt gaat.

Gegeven: a raakt in P aan de cirkel $c(M,r)$

Te bewijzen: $MP \perp a$

Bewijs.

Veronderstel dat MP niet loodrecht op a staat.



Dan is er een andere loodlijn uit M op a met voetpunt Q en $Q \neq P$

$\Downarrow$ in een rechthoekige driehoek is de schuine zijde de langste

$|MQ| < |MP| = r$ gegeven $P \in c(M,r)$

Q is een punt die binnen de cirkel ligt

$\Downarrow Q \in a$

a bevat een punt die binnen de cirkel ligt.

Dus a snijdt de cirkel.

Dit is strijdig met het gegeven.

Dus MP staat loodrecht op a . □

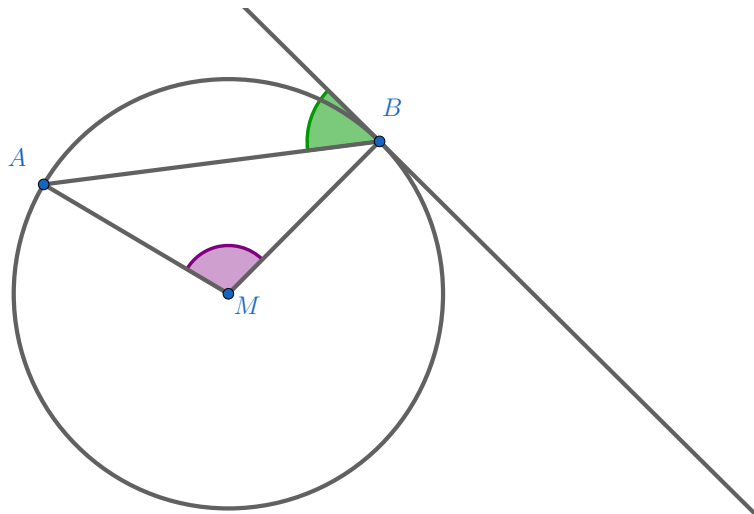
Gevolg:

In elk punt van de cirkel is er juist één raaklijn aan de cirkel. De raaklijn is immers de loodlijn op de middellijn in het raakpunt en een loodlijn op een rechte door een punt is uniek.

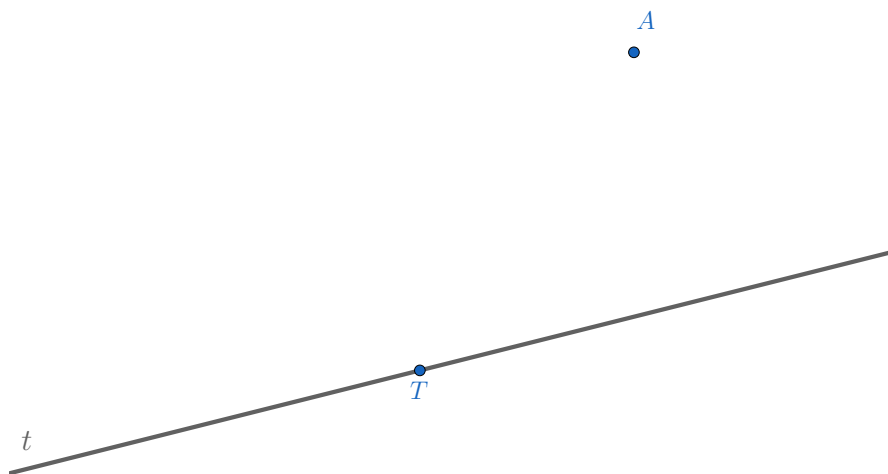
Om de **raaklijn** aan een cirkel in een punt te tekenen moeten we de loodlijn door dat punt tekenen, bijvoorbeeld met een geodriehoek.

Omdat raken in het Latijn *tangere* is wordt voor de raaklijn ook de letter t en voor het raakpunt de letter **T** gebruikt.

35. De kleinste hoek tussen een koorde en een raaklijn in een eindpunt van deze koorde is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die op deze koorde staat. Toon aan.



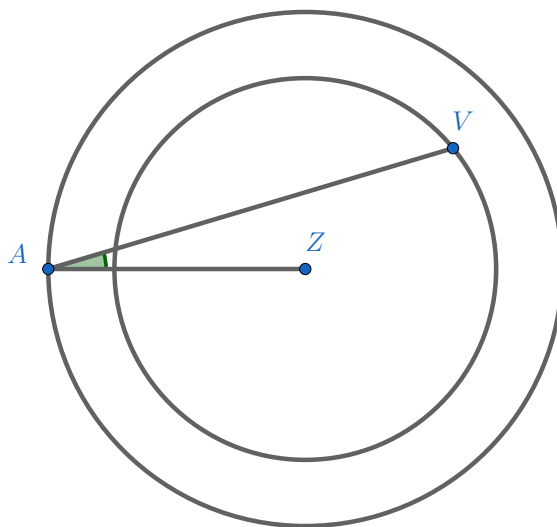
36. Construeer een cirkel die door A gaat en de rechte t raakt in T.



37. Een driehoek ABC is rechthoekig in C. a is de raaklijn in A aan de omcirkel van deze driehoek. Bepaal de hoek tussen a en de middellijn door C in functie van $\hat{A}$ en $\hat{B}$.

38. In ons zonnestelsel draaien de planeten ongeveer in een cirkelvormige baan om de zon Z. De straal van de baan van de Aarde om de zon is 150 miljoen km. Venus V is de planeet die het dichtst bij de Aarde A staat.

- (a) Teken een positie van V en een positie van A zodat $\widehat{VAA}$ het grootst is.
- (b) Men heeft vastgesteld dat de grootste waarde van $\widehat{VAZ}$ 46° is. Berekenen de afstand van Venus tot de zon.



4.2 Raaklijnen vanuit een punt aan een cirkel

In dit geval verstaan we onder raaklijnen de lijnstukken tussen het punt en de raakpunten.

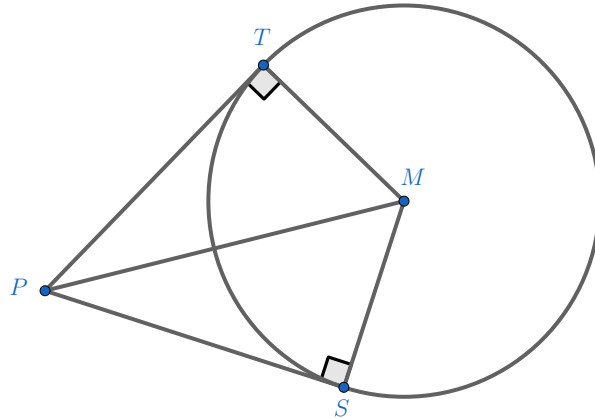
Gegeven: cirkel $c(M,r)$

punt P met $|PM| > r$

raaklijnen $[PT]$ en $[PS]$, T en S zijn raakpunten

Te bewijzen: $|PT| = |PS|$

Bewijs. Verbind P met M .



$$\triangle PMT \cong \triangle PMS \text{ want } \left(\begin{array}{l} |PM| = |PM| \\ |MT| = |MS| = r \\ \hat{T} = \hat{S} = 90^\circ \text{ raaklijn staat loodrecht op middellijn door het raakpunt} \end{array} \right)$$

↓ overeenkomstige zijden zijn gelijk

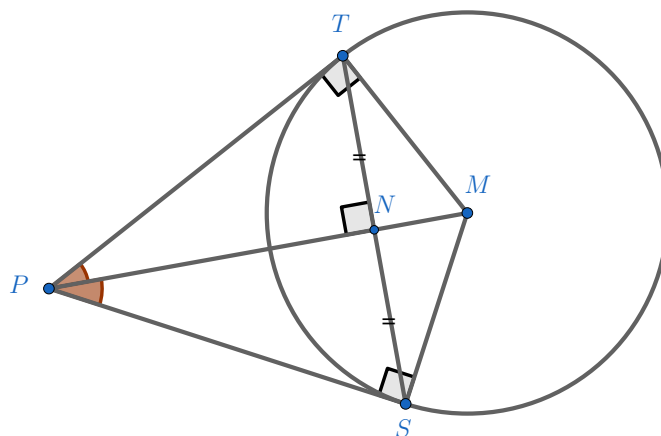
$$|PT| = |PS| \quad \square$$

Gevolgen:

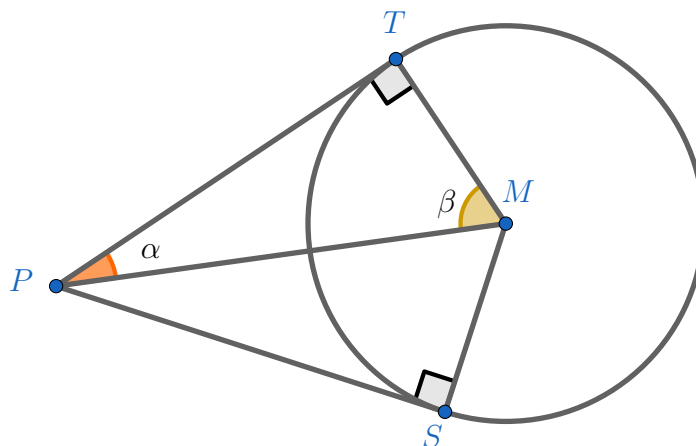
Als PT en PS raaklijnen zijn aan de cirkel $c(M,r)$ dan is PM de deellijn van $\widehat{TPS}$.

Als PT en PS raaklijnen zijn aan de cirkel $c(M,r)$ dan is PM de middelloodlijn van $[TS]$.

Een middelloodlijn van $[TS]$ is immers de meetkundige plaats van de punten die even ver van T als van S liggen: $|Tm| = |SM| = r$ en $|PT| = |PS|$.



39. PT en PS zijn raaklijnen aan de cirkel
Toon aan dat α en β complementair zijn.



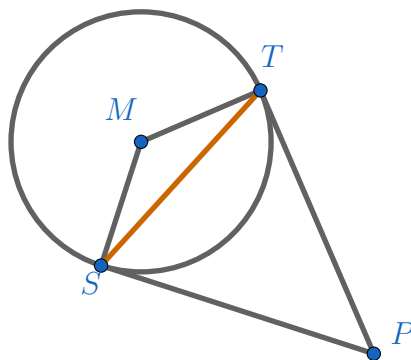
40. Een punt P ligt op 8 cm van het middelpunt M van een cirkel met diameter 10 cm.
Bereken de lengte van de raaklijnen uit P.

41. TP en SP zijn raaklijnen aan de cirkel $c(M,5)$ met raakpunten T en S .
 $|MP| = 13$
Maak een tekening en bereken $\widehat{TPS}$.

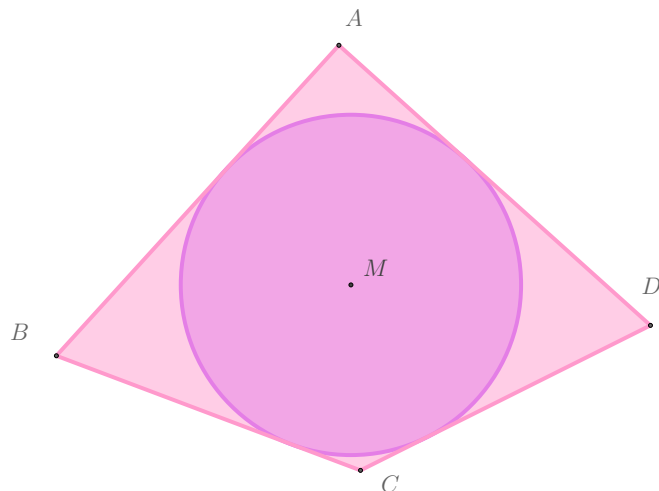
42. Gegeven is de cirkel $c(M,4)$. P is een punt buiten de cirkel.
 PT en PS zijn raaklijnen met T en S de raakpunten.
 $|TS| = 7$

(a) Bereken $\widehat{TMS}$

(b) Bereken $|PM|$



43. $ABCD$ is een raaklijenvierhoek omschreven aan de cirkel.



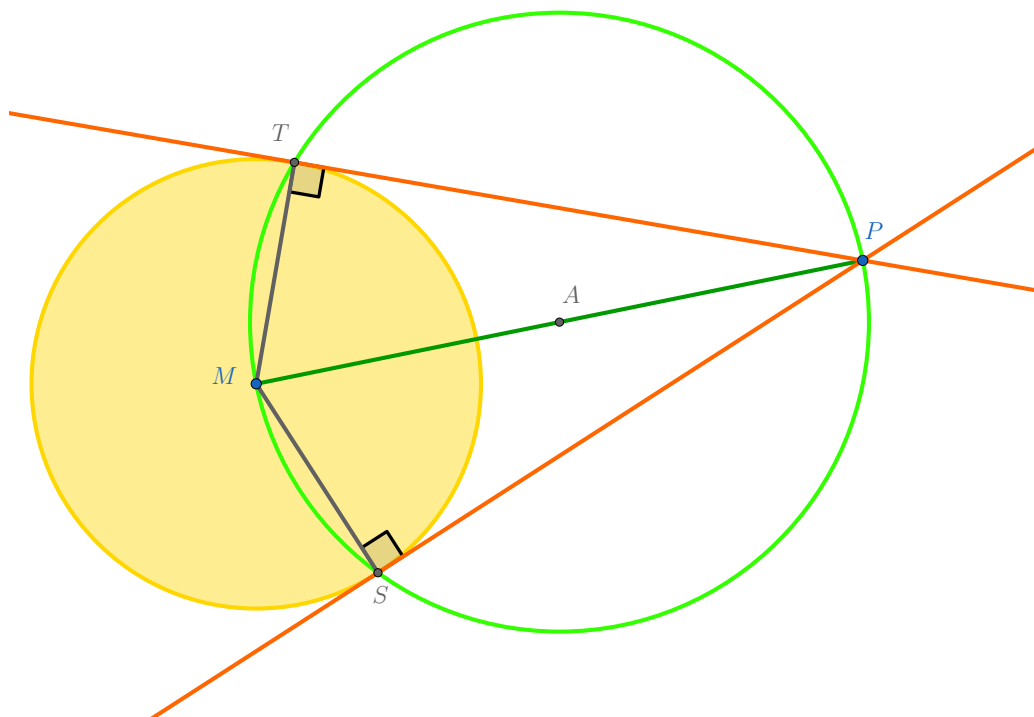
Als $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ en $|CD| = 3$ dan is $|AD|$ gelijk aan

- a) 1 b) 2 c) 2.4 d) 3 e) 3.75

VWO 2000, eerste ronde

Constructie van de raaklijnen uit een punt aan een cirkel

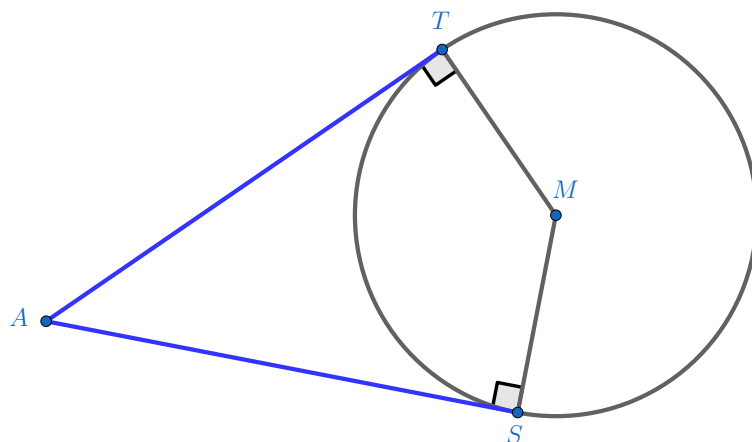
De raaklijnen uit P moeten loodrecht staan op de middellijn door de raakpunten T en S . Dus $\widehat{MTP} = \widehat{MSP} = 90^\circ$. Deze hoeken zijn dus omtrekshoeken op de middellijn $[MP]$.



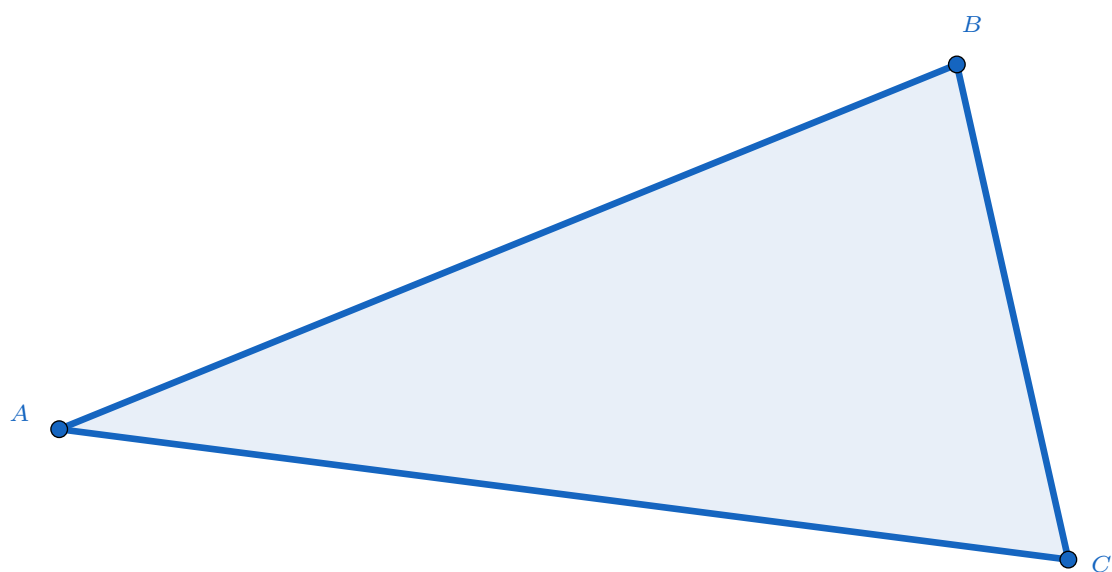
4.3 Ingeschreven cirkel van een driehoek

44. AT en AS zijn raaklijnen aan $c(M,r)$.

(a) Hoe kan je een driehoek ABC construeren zodat de drie zijden de gegeven cirkel raken?



(b) Als een driehoek gegeven is, hoe kan je de cirkel die in de driehoek ligt en die de drie zijden van deze driehoek raakt construeren?
Hoe bepaal je de straal van deze cirkel?



Ingeschreven cirkel van een driehoek

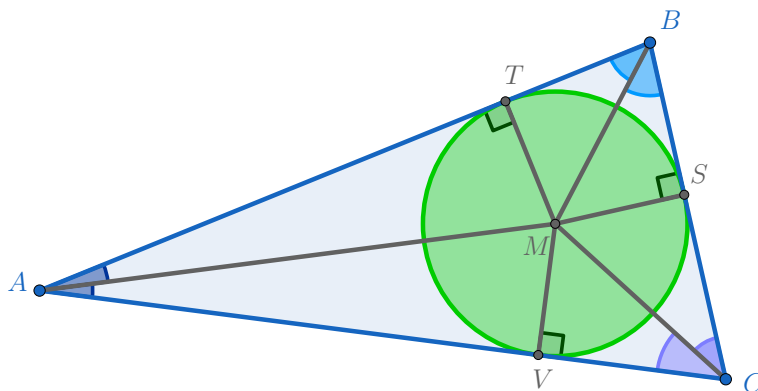
Er bestaat juist één cirkel die de drie zijden van een driehoek raakt.

Bewijs.

Als de cirkel de drie zijden van de driehoek raakt, dan zijn de raaklijnen even lang. De afstanden van het middelpunt tot de raaklijnen zijn wegens de congruentie van driehoeken gelijk. Deze afstand is de straal van de cirkel.

Wegens de congruentie van driehoeken zijn de verbindingslijnen tussen de hoekpunten en het middelpunt deellijnen van de drie hoeken van de gegeven driehoek. Het middelpunt is dan het snijpunt van deze drie bissectrices.

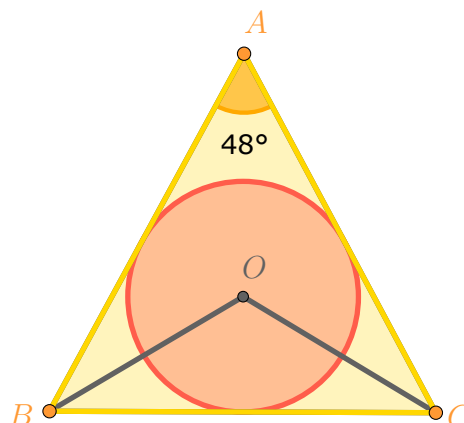
Omdat er maar één snijpunt van de bissectrices is, is deze ingeschreven cirkel uniek.



□

45. Bereken de zijde van een gelijkzijdige driehoek waarvan de straal van de ingeschreven cirkel 4 cm is.
46. Een gelijkbenige driehoek heeft ABC heeft $\widehat{BAC} = 48^\circ$
 Als O het middelpunt is van de omgeschreven cirkel dan is de hoek $\widehat{BOC}$ gelijk aan
- a) 96° b) 108° c) 114° d) 122° e) 132°

JWO 2008, eerste ronde

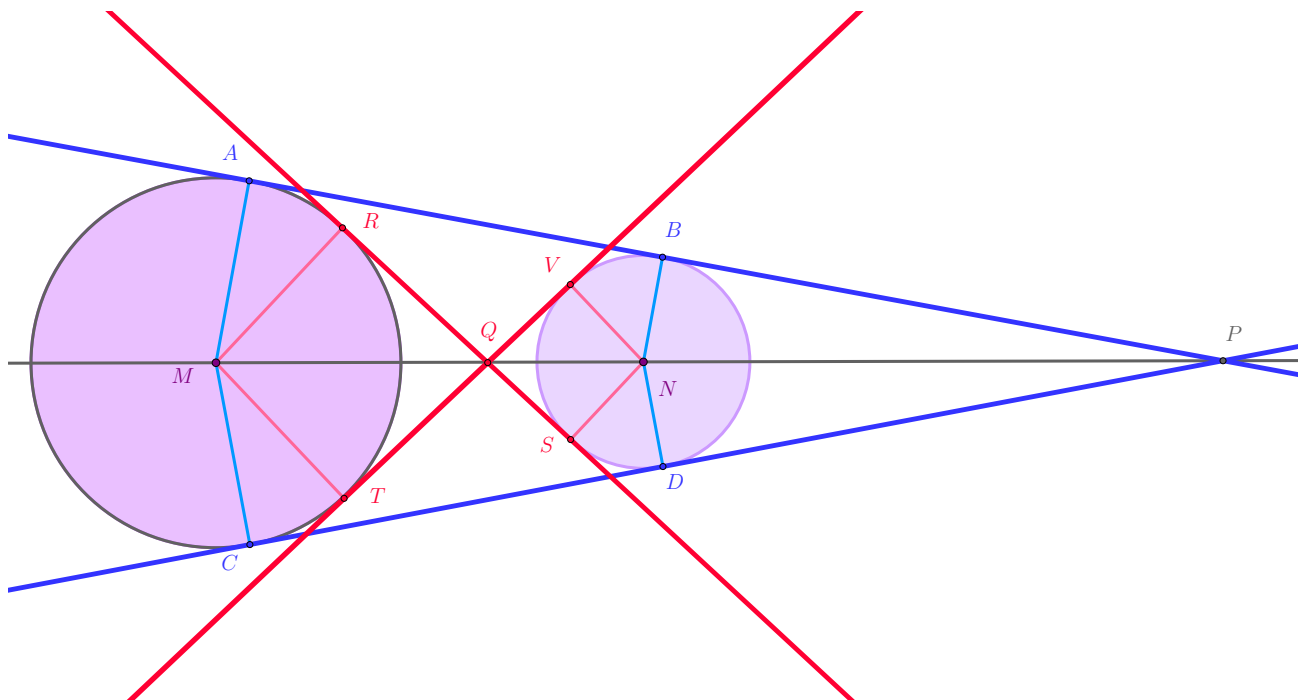


4.4 Gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels

47. Gegeven zijn de cirkels $c(M,5)$ en $c(N,3)$ met $|MN| = 10$

De twee cirkels hebben twee **uitwendig gemeenschappelijke raaklijnen** AB en CD die elkaar snijden in P en twee **inwendig gemeenschappelijke raaklijnen** RS en TV die elkaar snijden in Q .

MN is een middellijn van $c(M,5)$ en van $c(N,3)$. Deze gemeenschappelijke middellijn is dus een symmetrieas van beide cirkels. P en Q liggen op MN .

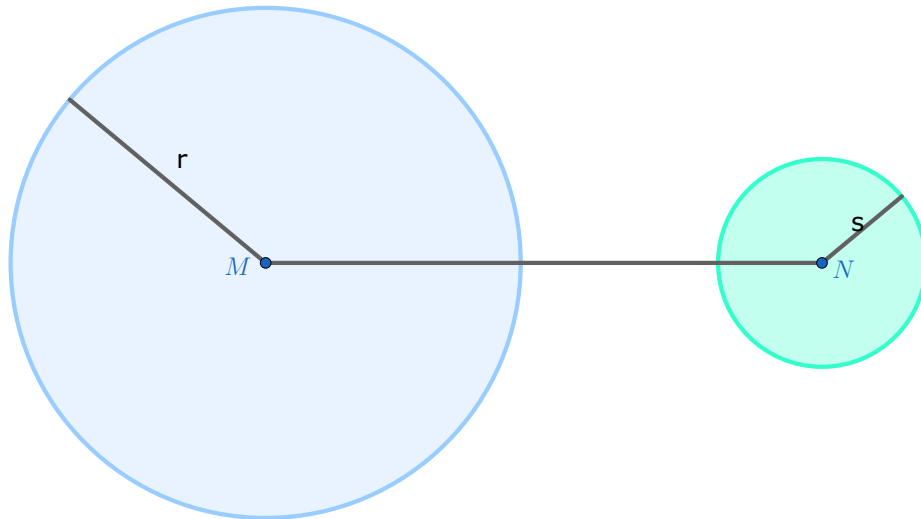


(a) Bereken $|PN|$ en $|QN|$

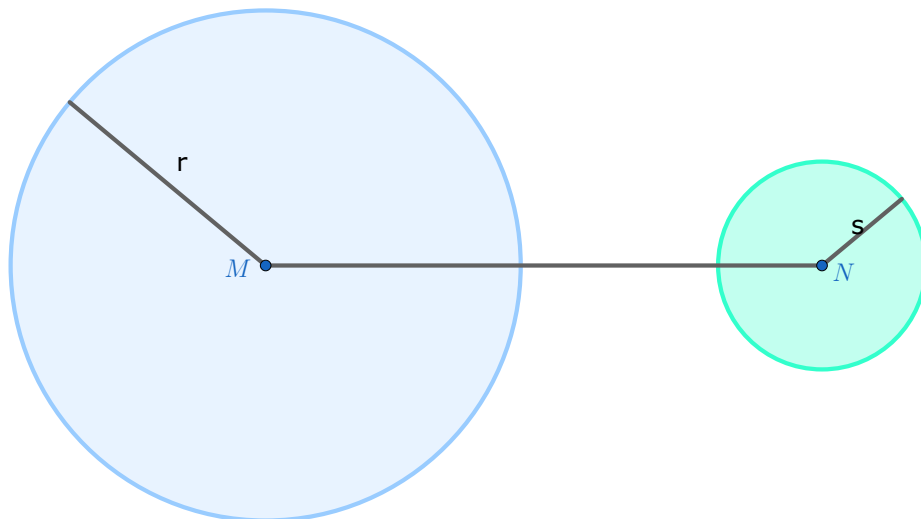
(b) Bereken de hoeken $\widehat{APD}$ en $\widehat{RQT}$

48. Gegeven zijn twee cirkels $c(M, r)$ en $c(N, s)$ met $|MN| > r + s$

(a) Construeer de gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen aan beide cirkels

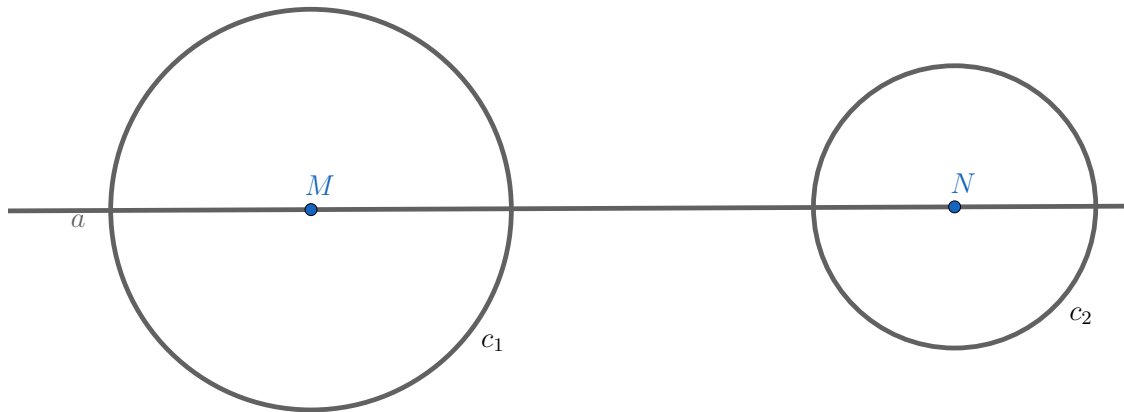


(b) Construeer de inwendig gemeenschappelijke raaklijnen aan de twee cirkels.



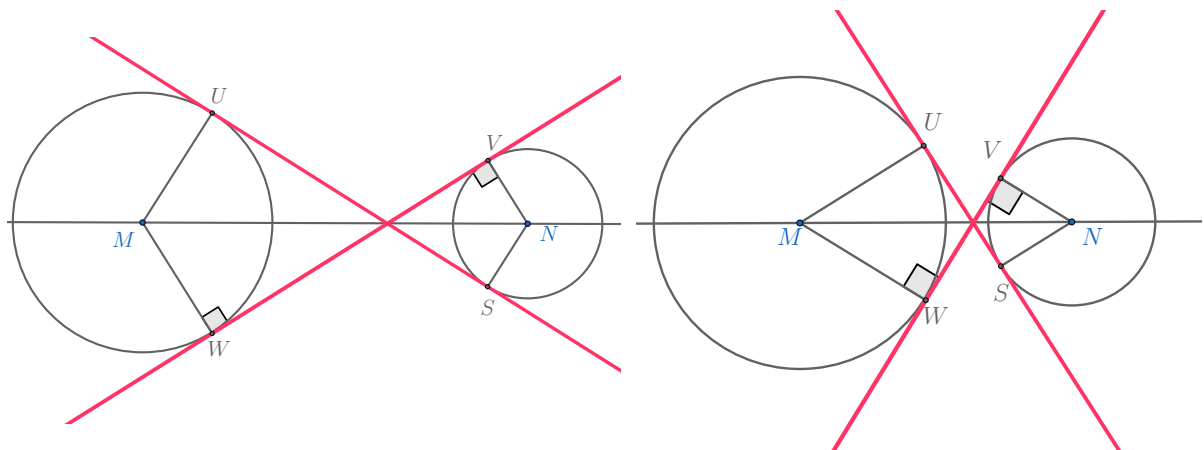
5 Centraal en onderlinge ligging

49. Twee cirkels $c_1(M, r)$ en $c_2(N, sr)$ met M en N op de rechte a hebben geen snijpunten. Schuif de middelpunten naar elkaar toe en ga na in welke gevallen deze cirkels geen, juist één of twee snijpunten hebben.

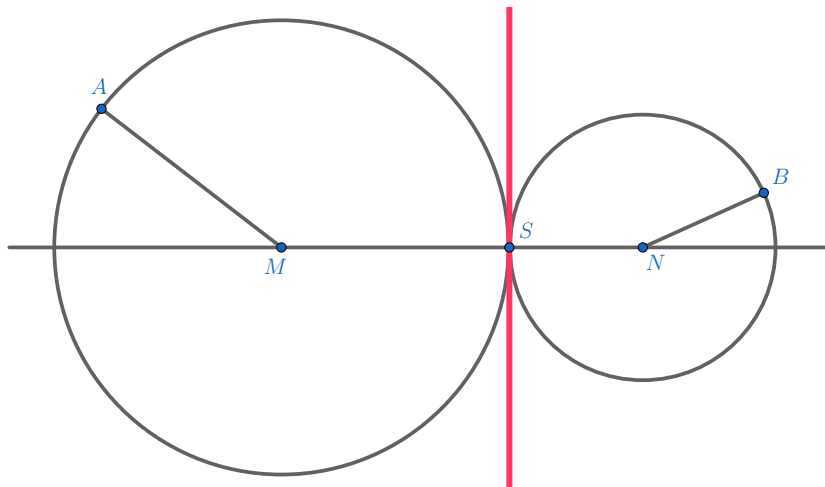


De rechte MN van de bovenstaande figuur is middellijn van $c(M, r)$ en van $c(N, s)$. MN is de symmetrieas van de gehele figuur. MN noemen we de **centraal**.

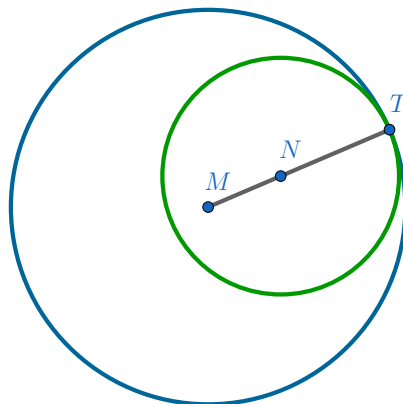
Als we M en N dichter bij elkaar schuiven dan komen de binnenraaklijnen van de twee cirkels meer in de verticale richting te staan.



Als $|MN| = r + s$, dan vallen de inwendig gemeenschappelijke raaklijnen samen. Deze gemeenschappelijke raaklijn staat dan loodrecht op de centraal.

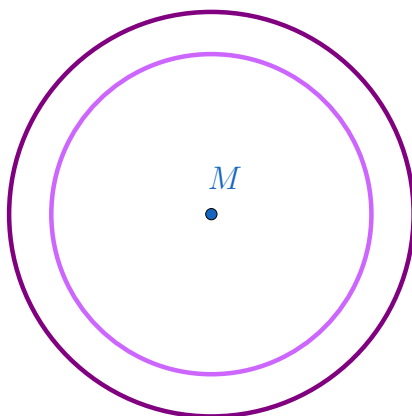


Deze cirkels zijn uitwendig rakend.

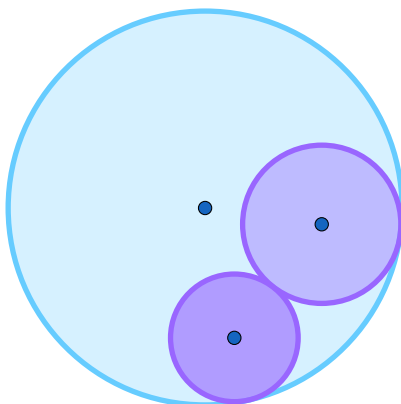


Deze cirkels zijn inwendig rakend. $|MN| = r - s$

Cirkels met eenzelfde middelpunt (en verschillende straal) noemen we concentrische cirkels



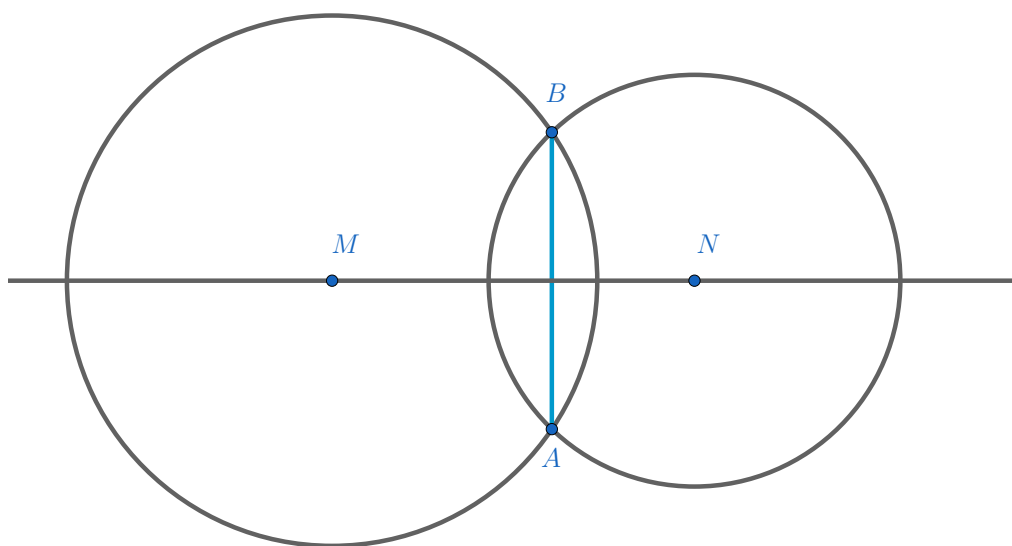
50. Een cirkel met straal 4 en een cirkel met straal 5 raken elkaar uitwendig en beide raken inwendig aan een cirkel met straal 12.
Bepaal de omtrek van de driehoek gevormd door de middelpunten van deze cirkels



- a) 18 b) 21 c) 24 d) 25 e) 26

JWO 2009, eerste ronde

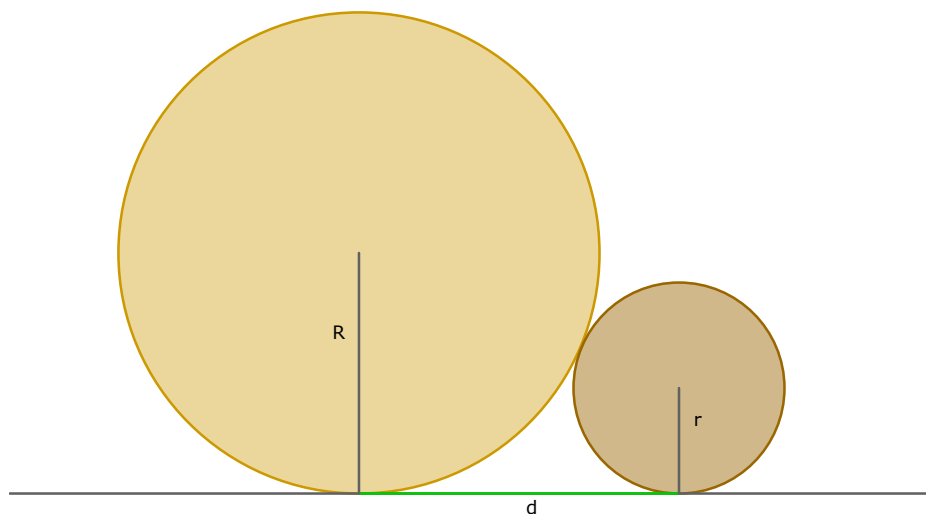
51. $c(M, r)$ en $c(N, s)$ snijden elkaar in A en B.



- (a) MN is de middelloodlijn van $[AB]$. Toon aan.
(b) Als $r = 7$, $s = 4$ en $|MN| = 10$. Bereken dan $|AB|$

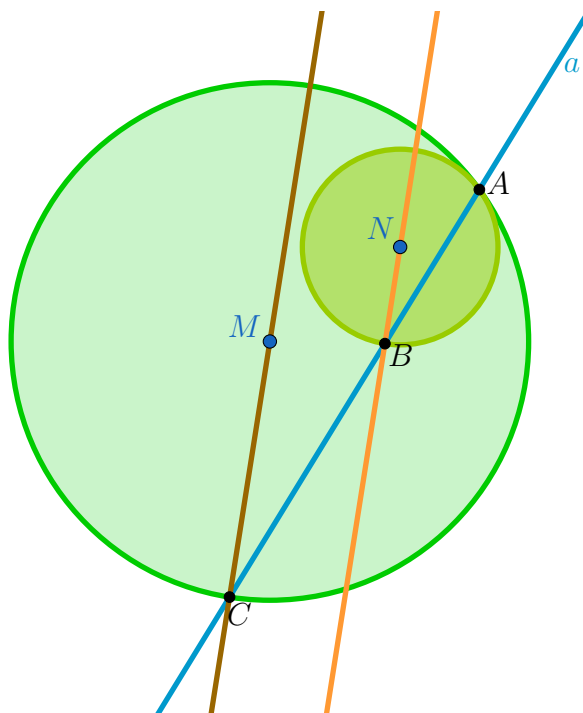
52. Wat is de meetkundige plaats van de cirkels met straal 4 die raken aan $c(M, 5)$?

53. Een sangaku⁶



Twee cirkels met stralen R en r raken elkaar en raken aan de onderste rechte. Schrijf d in functie van R en r .

54. $c(M, r)$ en $c(N, s)$ raken elkaar inwendig in A . Een rechte a door A snijdt $c(M, r)$ en $c(N, s)$ in C respectievelijk B .
Toon aan dat $MC \parallel NB$.



⁶Sangaku

Gedurende het grootste deel van de Edo periode (1603 – 1867) was Japan afgesloten van de westerse wereld. Maar geleerden uit alle lagen van de bevolking, van boeren tot samoerai bedachten stellingen uit de vlakke meetkunde. Deze stellingen verschenen als prachtig gekleurde tekeningen op houten tabletten die opgehangen werden onder de daken van de tempels. Zo'n tablet werd Sangaku genoemd, Japans voor 'wiskunde-tablet'.



'Dansende golven', Patrick Steen, 2008 - Oostende

6 Regelmatige veelhoeken

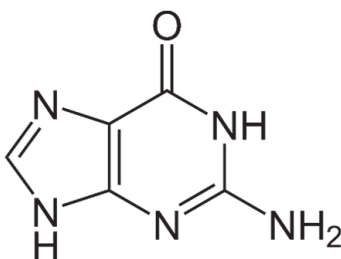
In de natuur, in de kunst en in de wetenschappen komen geregeld veelhoeken met gelijke zijden en hoeken voor.



Sneeuwvlok



Verluchtingsgat in een gevel



Structuurformule van guanine



Rozet in Notre Dame, Parijs



Vloertegel zeedijk, Oostende

6.1 Regelmatige veelhoeken

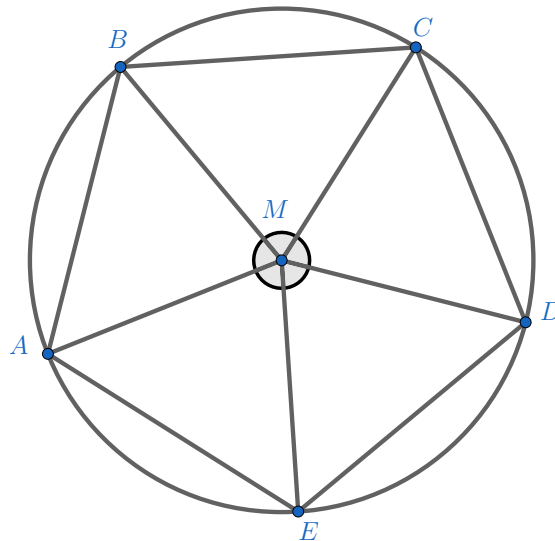
Een **regelmatige veelhoek** is een veelhoek waarvan alle zijden en alle hoeken gelijk zijn.

Eigenschap:

Als n stralen $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$... de 360° rond M verdelen in n gelijke hoeken $\frac{360^\circ}{n}$ dan is $ABC...$ een regelmatige n -hoek.

Bewijs.

We nemen als voorbeeld een cirkel waarvan de middelpuntshoek van 360° in 5 gelijke delen verdeeld is.



$$\triangle ABM \cong \triangle BCM \text{ want } \begin{cases} |AM| = |BM| = |CM| \\ \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \frac{360^\circ}{n} \end{cases} \quad \text{HZH}$$

Hieruit volgt dat de overeenkomstige zijden ook gelijk zijn: $|AB| = |BC|$

Op analoge wijze kunnen we bewijzen dat ook de andere zijden gelijk zijn $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA|$. $ABCDE$ is dus een regelmatige vijfhoek. □

Als een veelhoek regelmatig is, dan liggen de hoekpunten op één cirkel.

Deze cirkel noemen we de **omgeschreven cirkel van de regelmatige veelhoek**.
bewijs zie oefening 55.

In een driehoek ABM van een regelmatige n -hoek is de top hoek $\hat{M} = \frac{360^\circ}{n}$

We noemen deze hoek de **middelpuntshoek** van de regelmatige n -hoek.

De basishoeken zijn: $\frac{1}{2}(180^\circ - \frac{360^\circ}{n})$

Een hoek van de regelmatige veelhoek is het dubbel hiervan: $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

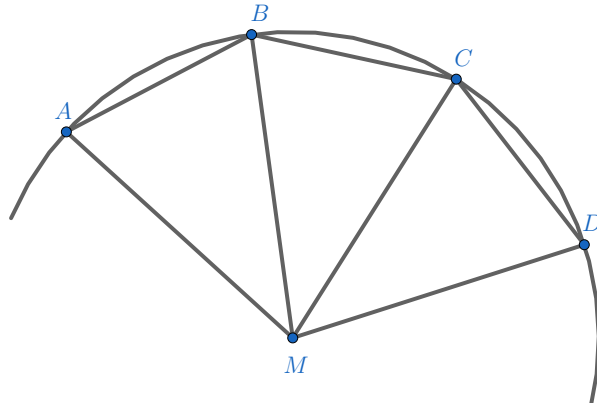
We kunnen dit ook op een andere manier bekijken:

De som van de hoeken van een regelmatige n -hoek is $(n-2) \cdot 360^\circ$.

Een hoek van een regelmatige n -hoek is $\frac{(n-2) \cdot 360^\circ}{n}$

55. De hoekpunten van een regelmatige veelhoek liggen op een cirkel:

We bekijken een deel van een regelmatige veelhoek.



(a) De hoekpunten van een (regelmatige) driehoek liggen op de omgeschreven cirkel. Wat is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek ABC?

(b) Ligt D ook op deze cirkel?

56. Van welke regelmatige n-hoek zijn de hoeken gelijk aan 108° ?

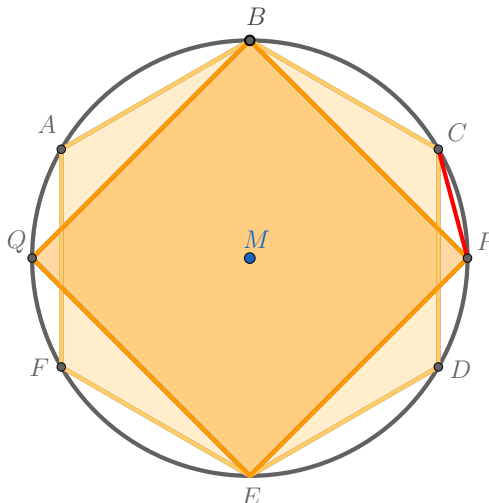
57. (a) Hoe groot is de middelpuntshoek van een regelmatige zeshoek?

(b) Construeer (dus enkel met passer en liniaal) een regelmatige zeshoek.

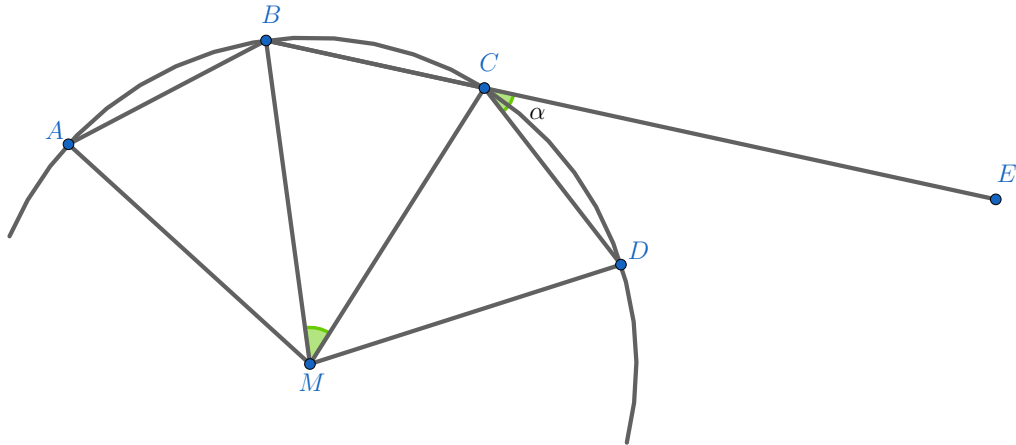
(c) Construeer een regelmatige twaalfhoek.

58. Construeer een regelmatige achthoek waarvan het apothema 2 cm is.

59. Een cirkel bevat een regelmatige zeshoek ABCDEF en het vierkant BPEQ. Van welke veelhoek is [CP] de zijde?



60. In een regelmatige veelhoek is de 'buitenhoek' α gelijk aan de middelpuntshoek van deze veelhoek. Toon aan.

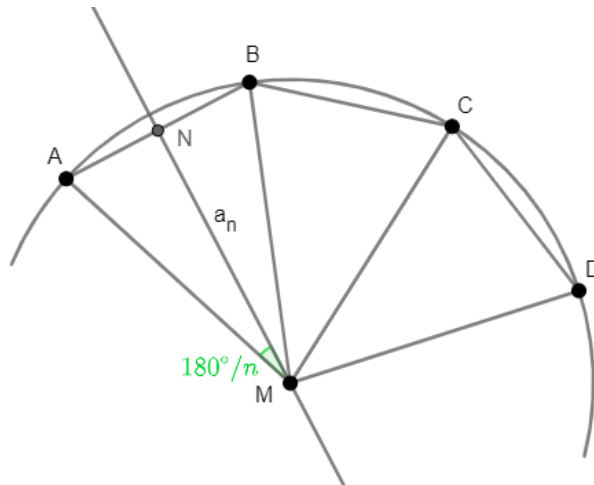


61. De straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige zeshoek is r . De lengte van de diagonaal die niet door het middelpunt gaat is gelijk aan

- a) $r\sqrt{2}$ b) $\frac{3r}{2}$ c) $r\sqrt{3}$ d) $2r$ e) $r\sqrt{5}$ f) $1 + \sqrt{2}$

VWO 1996, eerste ronde

6.2 Omtrek en oppervlakte van een regelmatige n-hoek



In een gelijkbenige driehoek ABM tekenen we de deellijn uit de tophoek M . Het snijpunt met de zijde $[AB]$ noemen we N . MN is ook middelloodlijn van $[AB]$. MN is ook het apothema a_n

In $\triangle ANM$ geldt: $a_n = |AM| \cdot \cos \frac{180^\circ}{n} = r \cos \frac{180^\circ}{n}$
 en $|AN| = |AM| \sin \frac{180^\circ}{n} = r \sin \frac{180^\circ}{n}$

Hieruit volgt:

De omtrek van een regelmatige n-hoek is $p_n = n z_n = 2n r \sin \frac{180^\circ}{n}$

De oppervlakte van een regelmatige n-hoek is $A_n = n \frac{a_n \cdot z_n}{2}$

$$A_n = n \frac{r \cos \frac{180^\circ}{n} \cdot 2r \sin \frac{180^\circ}{n}}{2}$$

$$A_n = n r^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}$$

62. De straal van de omgeschreven cirkel van deze twaalfhoek is 20 cm. Bereken de totale oppervlakte van de zwarte strepen.



63. Deze bijzondere dobbelsteen is een icoesaëder, een ruimtefiguur die uit 20 regelmatige driehoeken bestaat.



Bereken de manteloppervlak van deze icoesaëder als de ribbe 2 cm is.

64. Bepaal de inhoud van dit snoepdoosje waarvan de zijde 5 cm is en de hoogte 4,3 cm.



6.3 Omtrek en oppervlakte van een cirkel

Omtrek en oppervlakte van een cirkel ⁷

We bepalen de omtrek van een regelmatige n -hoeken die de cirkel met straal 0,5 als omgeschreven cirkel hebben.

n	$p_n = 2n \cdot 0.5 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$
6	3.0
12	3.105829...
24	3.132629...
48	3.139350...
96	3.141032...
192	3.141453...
384	3.141558...
768	3.141584...
1536	3.141591...

We stellen vast dat de omtrek van deze veelhoeken steeds dichterbij de waarde van π benadert.

Bij een regelmatige n -hoek is de omtrek

$$p_n = 2n \cdot r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$\Downarrow n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \text{ nadert naar } \pi \text{ (zie tabel) bij toenemende waarden voor } n$$

$$p_n \approx 2r\pi$$

Dit is niet toevallig de formule voor de omtrek ⁸ van een cirkel: $p = 2\pi r$

Analoog kunnen we voor de oppervlakte van een regelmatige n -hoek een zelfde benadering vinden:

$$A_n = nr^2 \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

$$\Downarrow \text{ steeds grotere waarden voor } n$$

$$A_n \approx \pi r^2$$

De formule voor de oppervlakte van een cirkel is: $A = \pi r^2$

⁷In de derde eeuw voor Christus slaagde Archimedes erin door de zijde van een regelmatige zeshoek vier keer te halveren een benadering voor π te vinden. Daardoor wordt als benadering van π ook $\frac{22}{7}$ genomen.

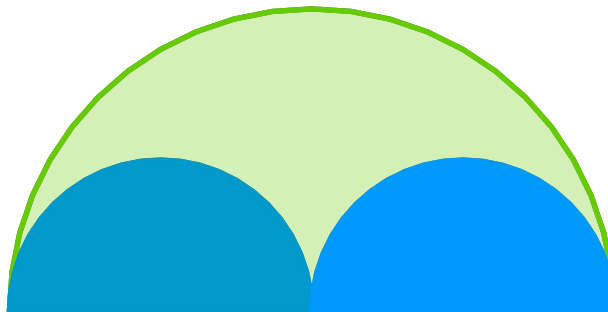
⁸Het getal π is ingevoerd als verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel: $\frac{p}{2r} = \pi$. π is de eerste letter van het Griekse woord periferia (= omtrek)

65. Dit strandmolentje bestaat uit twee concentrische cirkels. De grootste straal is 20 cm. De straal van de kleinste cirkel is 16 cm.
Bepaal hoeveel % de oppervlakte van de kleine cirkel kleiner is dan de oppervlakte van de grote cirkel.



66. De gevels van de binnentuin van 'Mosteiro des Jerónimos' in Lissabon zijn versierd met verschillende cirkelbogen.

Bepaal de oppervlakte van het groen gekleurd gedeelte als de grootste boog 5 m breed is.



7 Oefeningen

7.1 Koorde en middellijn

Reeks A

67. De straal van een cirkel is 13 cm. Een punt P ligt op 5 cm van het middelpunt. Hoe lang is de kleinste koorde door P?
68. Hier is een deel van een cirkel getekend. Construeer de volledige cirkel.

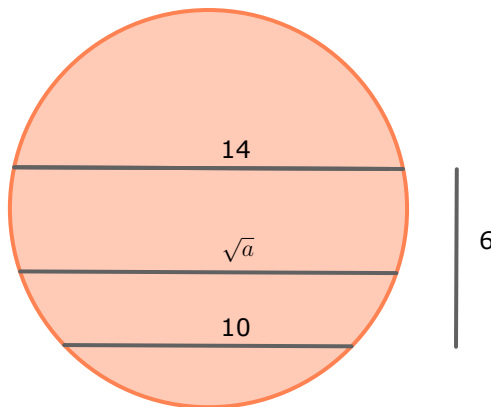


Reeks B

69. Gegeven zijn twee punten A en B en een cirkel $c(M, r)$. Twee evenwijdige rechten a en b die door A, respectievelijk B gaan snijden de cirkel. De bekomen koorden die op a en b liggen zijn even lang. Teken deze cirkel en rechten.

Reeks C

70. Twee evenwijdige koorden hebben als lengte 10 en 14.



Hun onderlinge afstand is 6. De koorde die evenwijdig is met de gegeven koorden en precies in het midden van beide koorden ligt heeft lengte $\sqrt{a}$. Dan is a gelijk aan

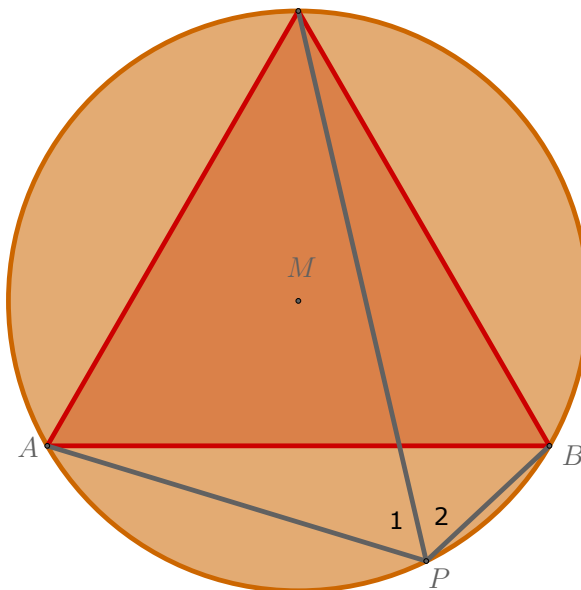
- a) 184 b) 176 c) 168 d) 156 e) 144

VWO 1995, tweede ronde

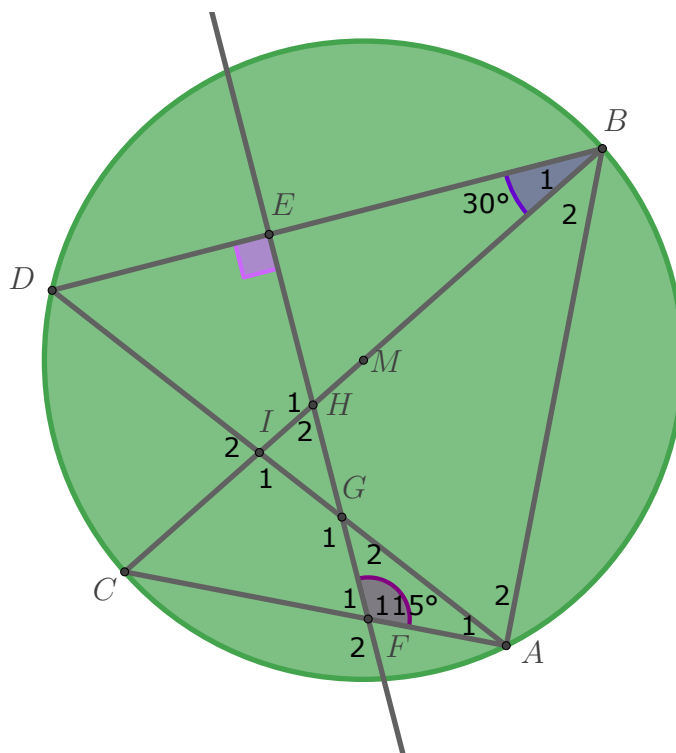
7.2 Hoeken

Reeks A

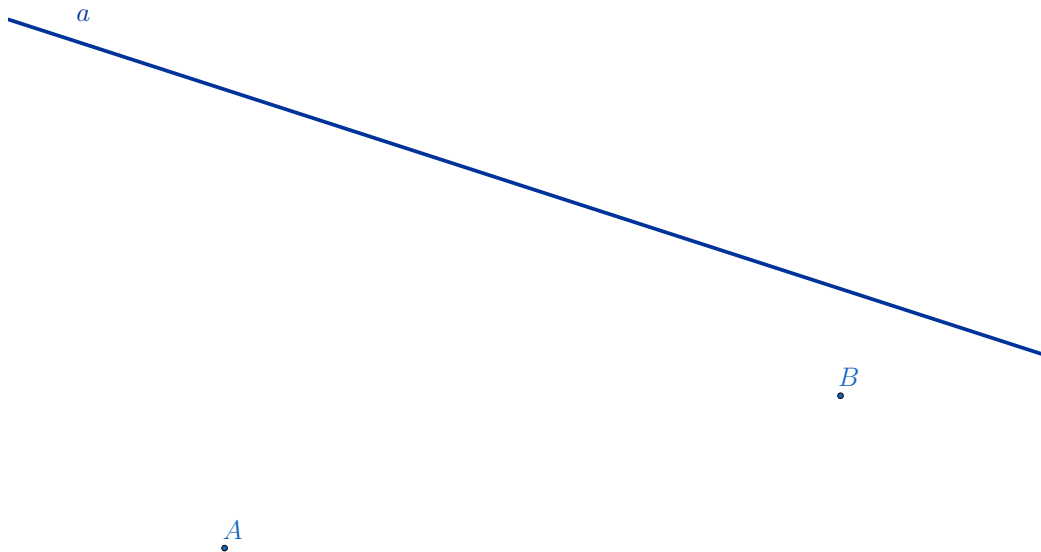
71. De drie punten van de gelijkzijdige driehoek ABC liggen op $c(M, r)$. Bereken $\hat{P}_1$ en $\hat{P}_2$.



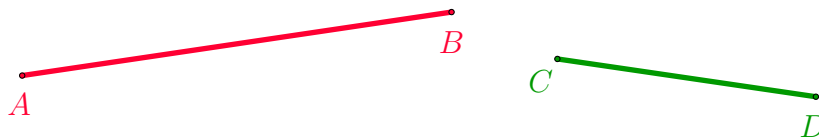
72. In deze cirkel $c(M, r)$ zijn gegeven zijn: $\widehat{B}_1 = 30^\circ$ en $\widehat{F}_2 = 115^\circ$. Bereken de overige hoeken.



73. Bepaal het (de) punt(en) P op de rechte a zodat $\widehat{APB} = 90^\circ$



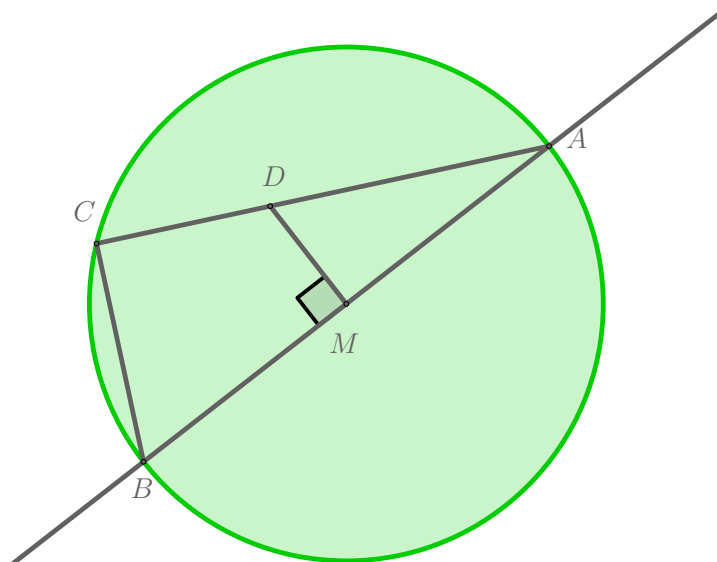
74. Construeer (dus met passer en liniaal) een lijnstuk dat middelevenredig met de lijnstukken die hier getekend staan.



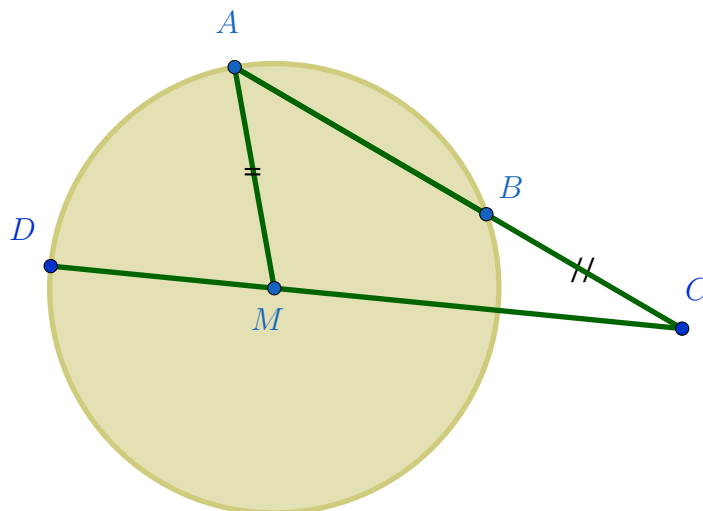
Reeks B

75. Youssef staat voor het midden van een gebouw van 20 m en ziet dat gebouw onder een hoek α . Hij stapt 15m dichterbij en ziet dat gebouw onder een dubbel hoek: 2α . Hoe ver staat Youssef nu van het gebouw?

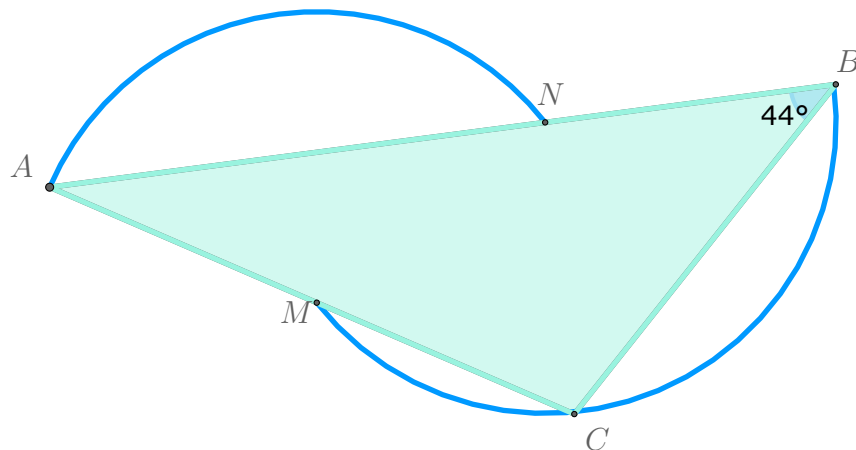
76. Gegeven is de cirkel $c(M, 10)$ met middellijn $[AB]$. C is een punt van de cirkel. Vanuit het middelpunt M wordt een loodlijn getrokken die $[AC]$ in het punt D snijdt. $|MD| = 4$. Bepaal $|AC|$.



77. Bewijs de stelling 8 uit het boek der lemma's van Archimedes:
Als men in een cirkel $c(M, r)$ een koorde $[AB]$ verlengt met $|BC| = r$ en de middellijn CD trekt, dan is $\widehat{AMD} = 3 \widehat{ACD}$.

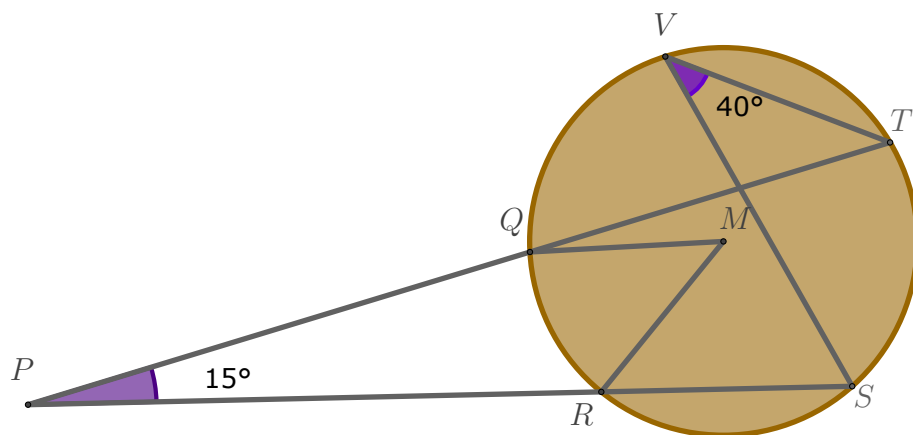


78. Op de driehoek ABC liggen M en N op twee zijden zoals op de figuur.
 M en N zijn middelpunten van de cirkelbogen.
 Hoe groot is $\widehat{C}$?

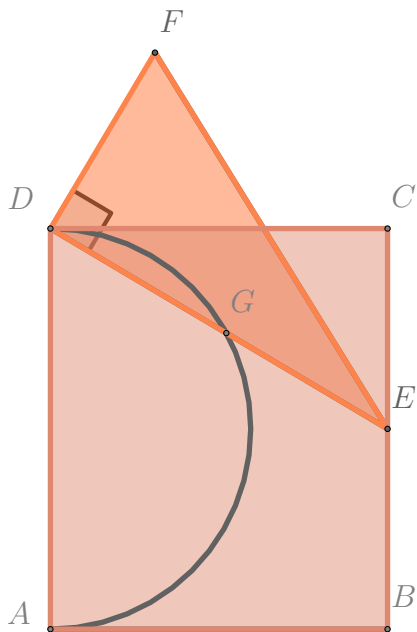


Reeks C

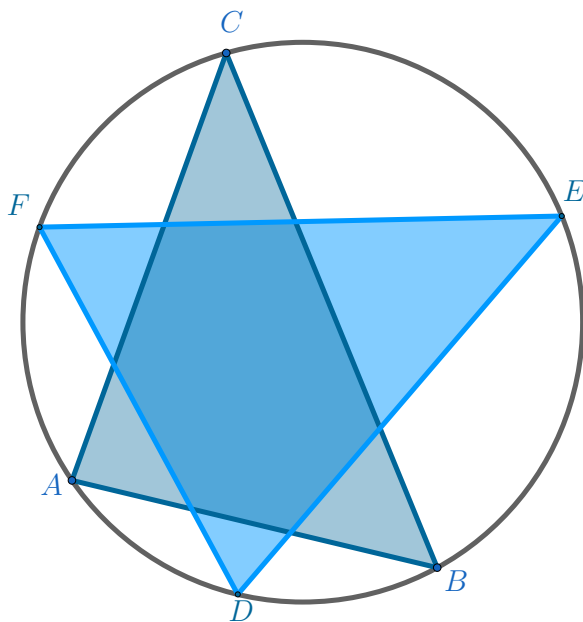
79. Gegeven is de cirkel $c(M, r)$. P is een punt buiten de cirkel. Bereken $\widehat{QMR}$.



80. $ABCD$ is een rechthoek met $|BC| = 6$
 E is het midden van $[BC]$. En is een hoekpunt van de rechthoekige driehoek DEF .
 G is een punt van de zijde $[DE]$ $|DG| = |DF|$
 Bepaal de oppervlakte van $\triangle DEF$.



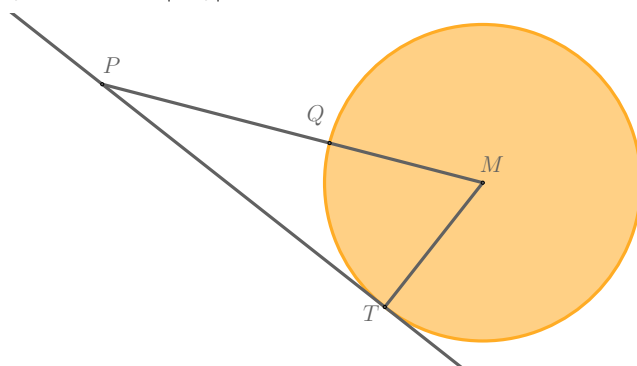
81. Om de driehoek ABC is de omgeschreven cirkel getekend. De punten D , E en F zijn de middens van de bogen AB , BC en respectievelijk AC .
 Toon aan dat $\hat{D} = \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{C})$



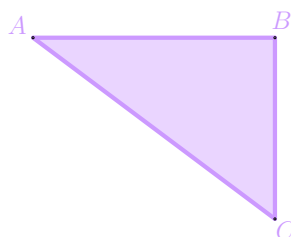
7.3 Raaklijnen

Reeks A

82. Gegeven is een cirkel $c(M, 8)$. PT is een raaklijn met raakpunt T . $|TP| = 20$. $[MP]$ snijdt de cirkel in Q . Bereken $|PQ|$



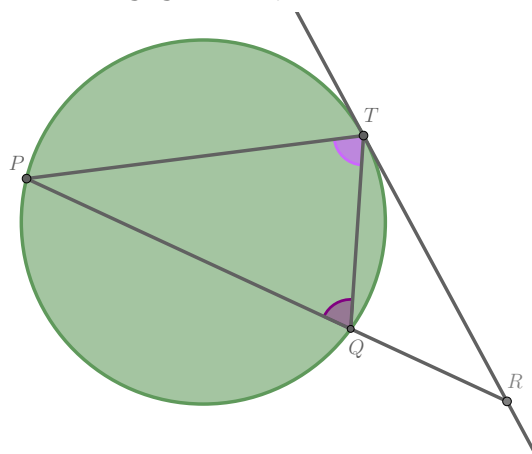
83. Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC met $|AB| = 4$ en $|BC| = 3$



- (a) Construeer de ingeschreven cirkel van deze driehoek
- (b) Bepaal de straal van de ingeschreven cirkel

Reeks B

84. P , Q en T zijn drie punten van de cirkel $c(M, r)$. De raaklijn t raakt de cirkel in T . t snijdt PQ in R . Van $\triangle PQT$ zijn twee hoeken gegeven: $\hat{Q} = 80^\circ$ en $\hat{T} = 70^\circ$. Bereken $\hat{QRT}$.

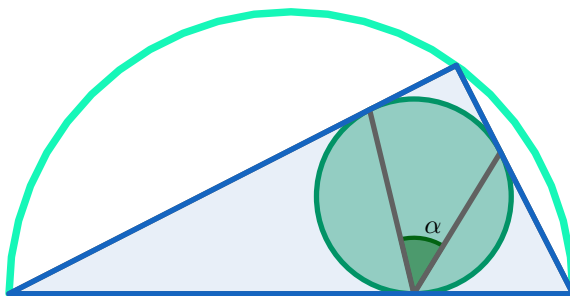


85. Bij de openingsceremonie van de olympische spelen 2024 werd de olympische vlam aan gestoken aan een ring die vastgemaakt is met touwen aan een luchtballon. De touwen waren op $1m$ van het middelpunt van de ring verankerd. Deze luchtballon had een straal van ongeveer $24m$. Het bovenste punt van de ballon bevond zich op $32m$ boven de ankerpunten van de touwen.



Hoe lang waren de rechte stukken touwen tussen de ballon en hun ankerpunt?

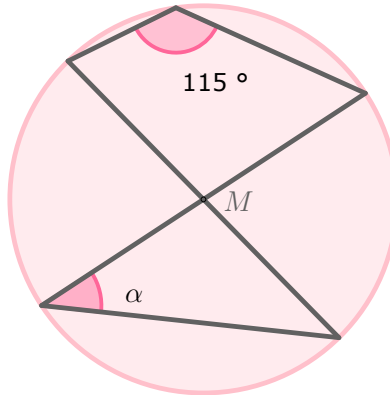
86. In een halfcirkel is een ingeschreven driehoek getekend met een ingeschreven cirkel. Bereken α .



7.4 Koordenvierhoek

Reeks A

87. Bereken α



88. Een koorde van een cirkel is 6 cm lang en staat loodrecht op een middellijn. Deze koorde deelt deze middellijn in twee lijnstukken die zich verhouden als 4 en 9. Bereken de straal van de cirkel.

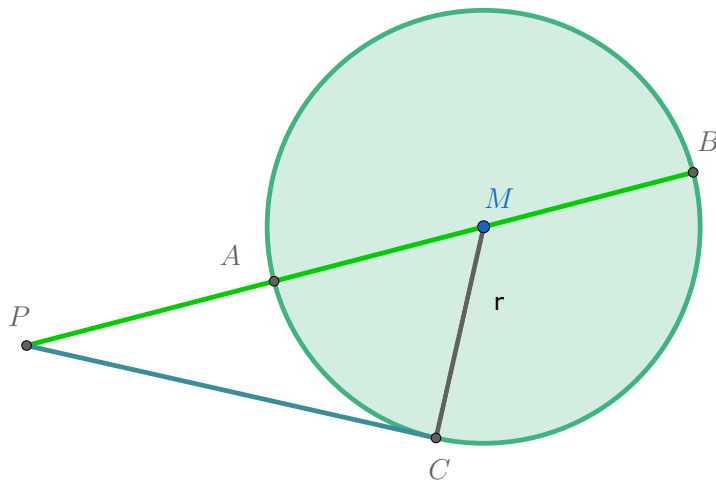
89. $ABCD$ is een koordenvierhoek in $c(M, r)$.
Teken op $[AB]$ de loodlijn l vanuit M .

Teken op $[BC]$ de loodlijn k vanuit M .

Bewijs dat $\widehat{lk}$ gelijk is aan één van de hoeken van de koordenvierhoek.

Reeks B

90. De macht van een punt P t.o.v. de cirkel $c(M, r)$ is gelijk aan $|PM|^2 - r^2$. Toon aan.



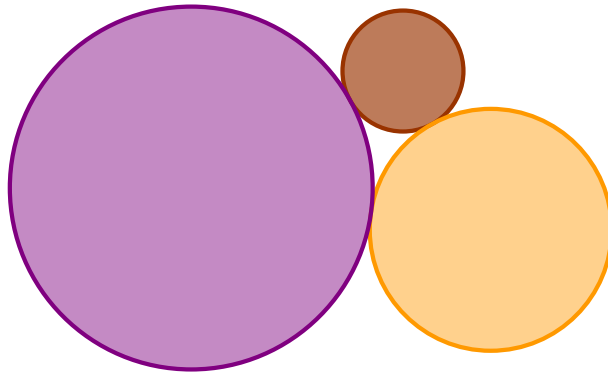
Reeks C

91. Een trapezium is een koordenvierhoek als en slechts als dit trapezium gelijkbenig is. Toon aan.

7.5 Centraal en onderlinge ligging

Reeks A

92. Verdeel de oppervlakte van een gegeven cirkels in twee gelijke oppervlakten door een concentrische cirkel.
93. Drie cirkels raken elkaar twee aan twee zoals op de figuur. Als de stralen van de cirkels respectievelijk 1 dm, 2 dm en 3 dm lang zijn, hoe groot is dan de oppervlakte van de driehoek met de drie middelpunten als hoekpunten?

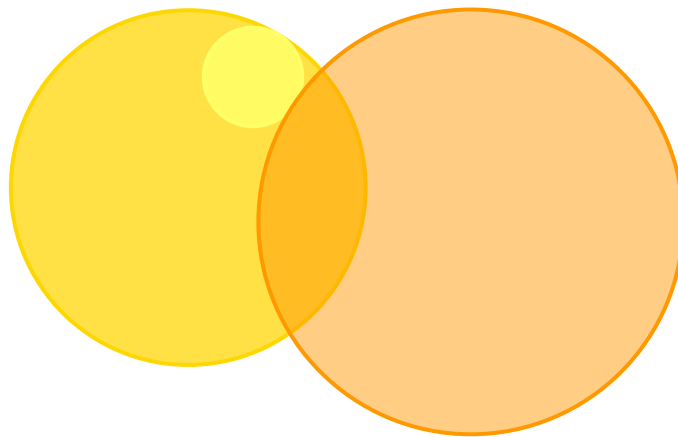


- a) 4 dm² b) 6dm² c) 8dm² d) 10dm² e) 12dm²

JWO 2006, eerste ronde

Reeks B

94. Twee cirkels met straal 3 cm en 7 cm snijden elkaar. Een derde cirkel raakt uitwendig aan de ene en inwendig aan de andere cirkel. Hoe groot is de som van de afstanden tussen het middelpunt van de derde cirkel en elk van de middelpunten van de eerste twee cirkels?

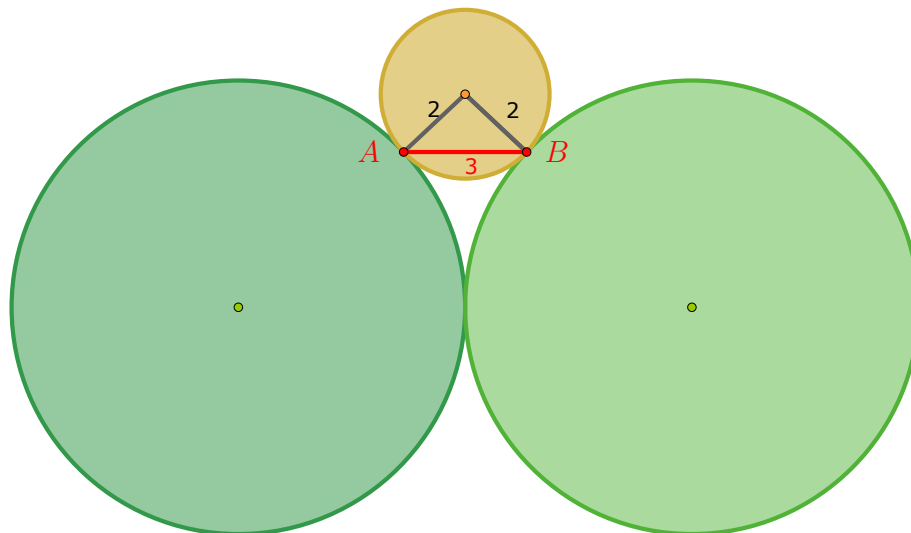


- a) 4 b) 5 c) 6 d) 10 e) Onvoldoende gegevens om het gevraagde te bepalen.

JWO 2021, eerste ronde

Reeks C

95. Twee cirkels met straal r raken elkaar uitwendig. Een derde cirkel met straal 2 raakt de deze twee cirkels ook uitwendig, met raakpunten A en B.

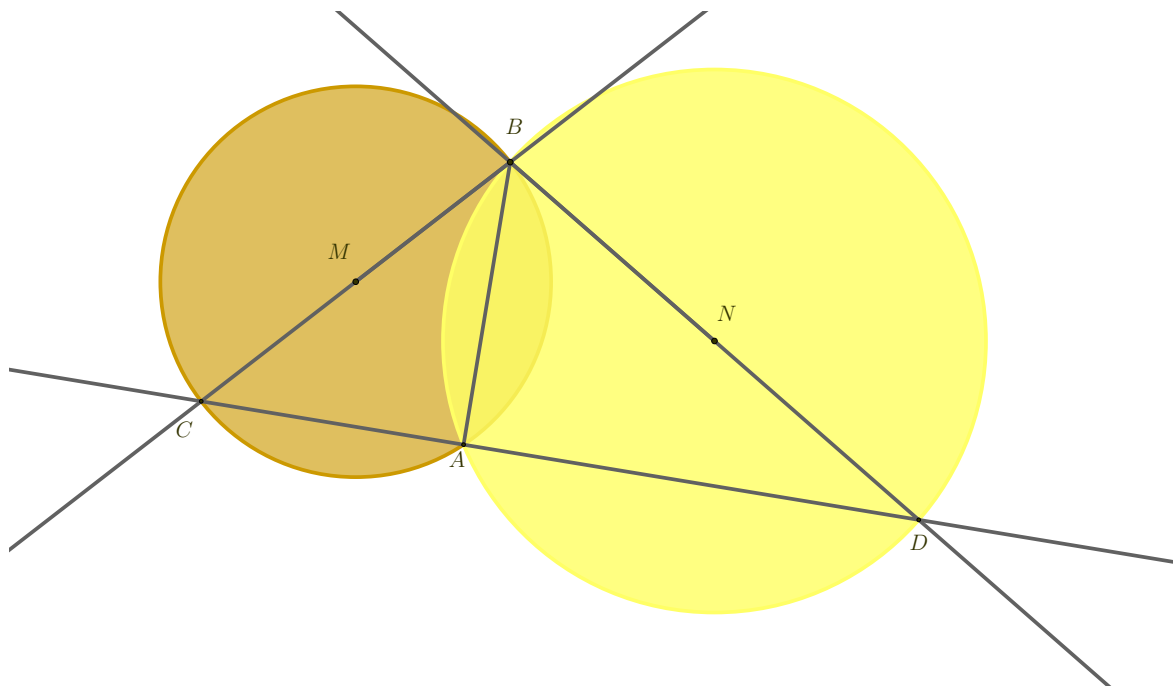


Als $|AB| = 3$, dan is r gelijk aan

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Gricha's vragenbank

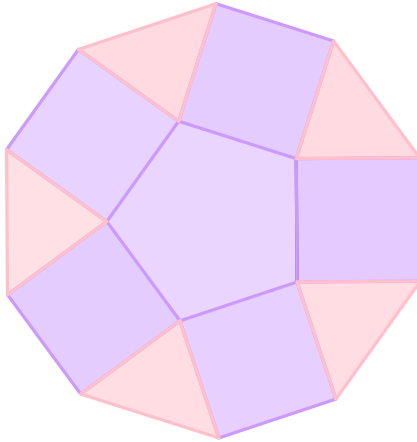
96. Twee cirkels $c(M, r)$ en $c(N, s)$ snijden elkaar in A en B. De middellijnen van de cirkels door B snijden $c(M, r)$ en $c(N, s)$ in C respectievelijk D. Toon aan dat AC en AD samenvallen.



7.6 Regelmatige veelhoeken

Reeks A

97. Op de zijden van een regelmatige vijfhoek zijn vijf vierkanten getekend zoals op de figuur.

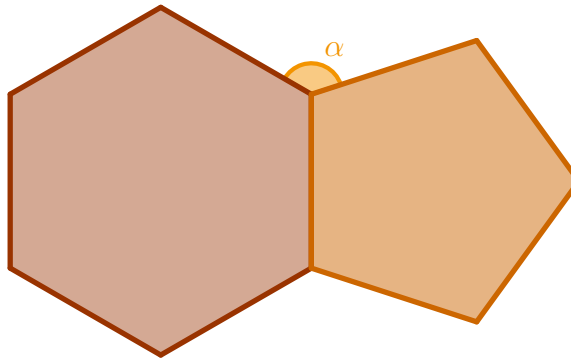


Hoe groot zijn de basishoeken van de gelijkbenige driehoeken die tussen de vierkanten getekend zijn?

- a) 36° b) 45° c) 54° d) 60° e) 72°

JWO 2021, eerste ronde

98. Een regelmatige vijfhoek en een regelmatige zeshoek hebben een zijde gemeenschappelijk. Hoe groot is α ?



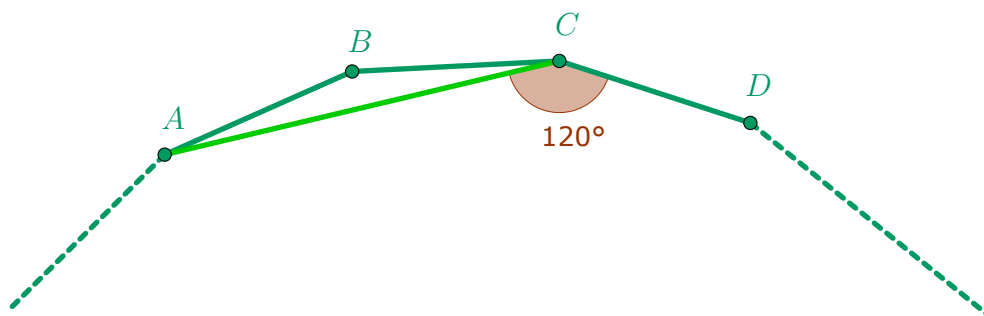
- a) 108° b) 120° c) 124° d) 132° e) 135°

JWO 2008, tweede ronde

99. In de Egyptische Rhind-papyrus uit ongeveer 1550 v. Chr. (één van de oudste gekende wiskundige geschriften) staat dat 'een cirkelvormige veld met diameter 9 hetzelfde oppervlakte heeft als een vierkant veld met zijde 8'. Welke waarde gebruikten Egyptische landmeters voor π ?

Reeks B

100. De punten A, B, C en D zijn opeenvolgende hoekpunten van een regelmatige n-hoek.

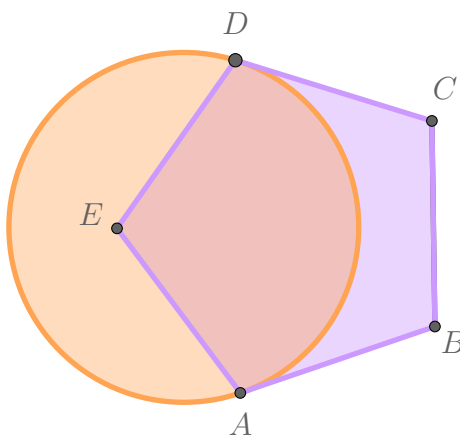


Als $\widehat{ACD} = 120^\circ$ dan is n gelijk aan

- a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

JWO 2014, eerste ronde

101. Gegeven zijn een cirkel en een regelmatige vijfhoek ABCDE.



CD is een raaklijn aan de cirkel met raakpunt D.

AB is een raaklijn aan de cirkel met raakpunt A.

De middelpuntshoek AD is gelijk aan

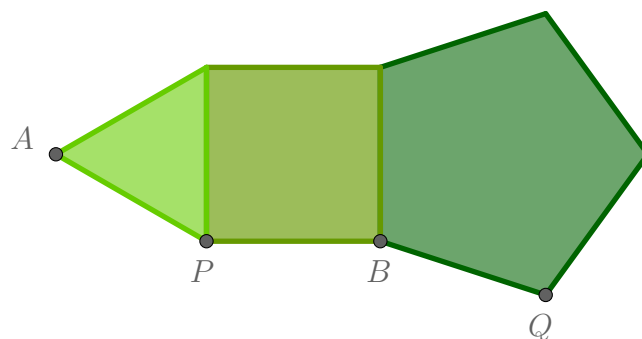
- a) 144° b) 135° c) 120° d) 108° e) 72°

VWO 1995, tweede ronde

Reeks C

102. De figuur is opgebouwd uit een gelijkzijdige driehoek, een vierkant en een gelijkzijdige vijfhoek.

Hoe groot is de hoek tussen de rechten AB en PQ?

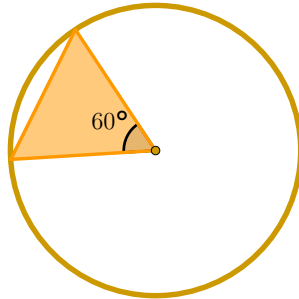


- a) 2° b) 4° c) 6° d) 8° e) 9°

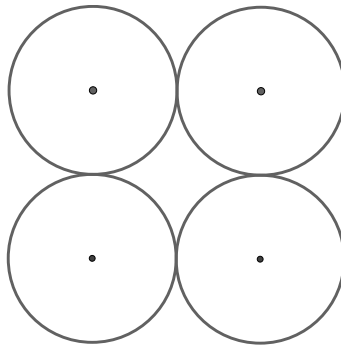
JWO 2019, eerste ronde

7.7 Herhalingsoefeningen

103. Hoe groot is de omtrek van de driehoek met tophoek 60° als de omtrek van de cirkel 4π is?



104. Vier cirkels met straal 1 raken elkaar zoals in de figuur.



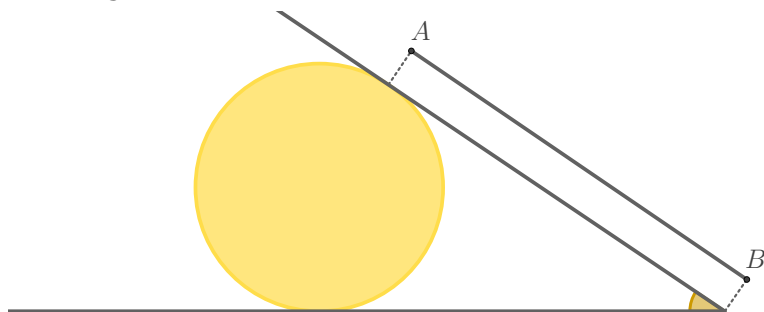
De straal van de omgeschreven cirkel van deze figuur is:

- a) 2,5 b) 3 c) π d) 4 e) $2\sqrt{2}$ f) $1 + \sqrt{2}$

Gricha's vragenbank

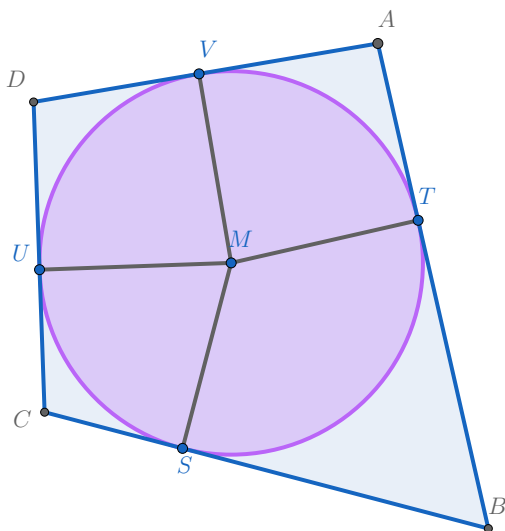
105. Na de graanoogst worden er balen stro met diameter 3 m gedraaid zoals op de foto. Deze liggen op een veld dat naast het parcours van de marathonwedstrijd ligt. Om de atleten goed te kunnen volgen besluiten enkele supporters om via een plank op een baal te stappen. Zie figuur.

Bepaal de hoek die de plank met de grond maakt als $|AB| = 7$ m.

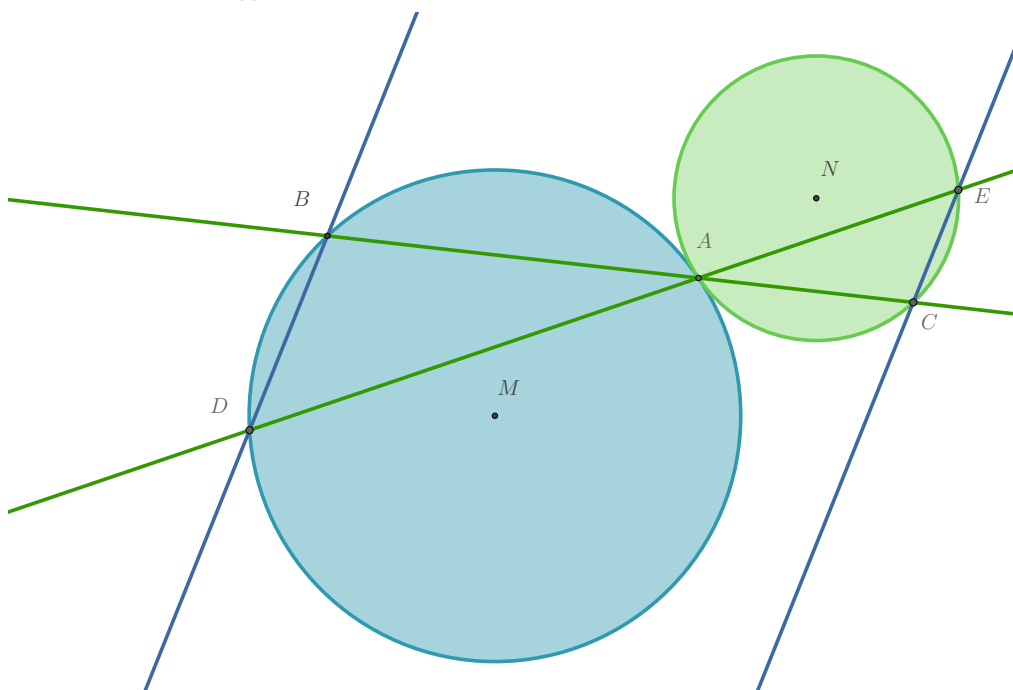


106. $ABCD$ is een raaklijenvierhoek van de cirkel $c(M, 5)$ met raapkunten R, S, T en U .
 $|AB| = 12$ en $|CD| = 7$

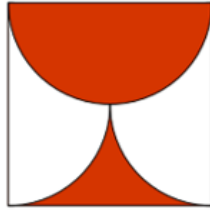
- (a) Bereken de omtrek van de vierhoek $ABCD$
 (b) Bereken de oppervlakte van de vierhoek $ABCD$



107. De cirkels $c(M, r)$ en $c(N, s)$ raken elkaar uitwendig in A . BC en DE zijn rechten door A waarbij B en D punten van $c(M, r)$ en C en E punten van $c(N, s)$ zijn.
 Toon aan dat $BD \parallel EC$.



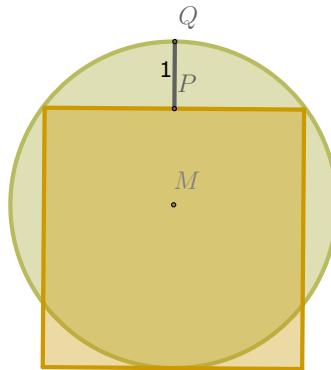
108. Het vierkant heeft oppervlakte 20 cm^2 . De zijde van het vierkant is de diameter van de cirkelbogen. Wat is de oppervlakte van het rood gekleurde stuk?



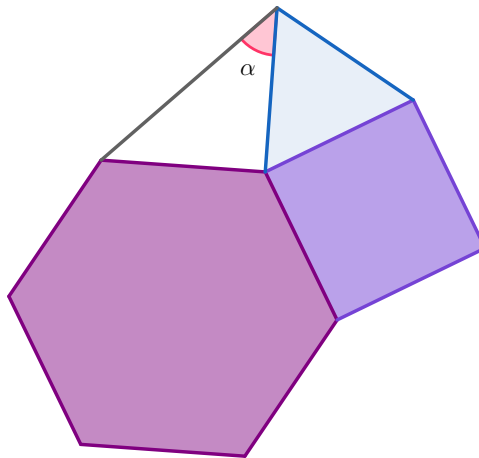
- a) 9 cm^2 b) 10 cm^2 c) 11 cm^2 d) 12 cm^2 e) 13 cm^2

JWO 2017, eerste ronde

109. Gegeven zijn een cirkel met punt P en een vierkant met punt Q . $|PQ| = 1$. Bereken de zijde van het vierkant.



110. In een vlak liggen een regelmatige zeshoek, een vierkant, een gelijkzijdige driehoek en een andere driehoek zoals in de figuur. Hoe groot is de aangeduide hoek α van deze laatste driehoek?



- a) 22.5° b) 30° c) 36° d) 45° e) 60°

JWO 2018, eerste ronde

Referenties

- [1] C. De Cock, *Vlakke meetkunde deel II*, 1955.
- [2] *Uitwiskeling, wiskunde tijdschrift*, jaargang 39/2 - 2023
- [3] *VWO wiskundeolympiades*.
- [4] <https://meetkundepuzzels.jouwweb.be/>
- [5] *Examenbundel wiskunde Nederland*.
- [6] *Arthesis 13 – 3, sangaku*.